УДК 621.03

В.А. Краснобаев[1], д-р техн. наук,
С.А. Кошман[2], канд. техн. наук, **М.А. Маврина**[1]
[1] Полтавский национальный технический университет им. Ю. Кондратюка
(Украина, 36000, Полтава, Первомайский пр-т, 24,
тел. (053) 2271855, e-mail: krasnobaev_va@ukr.net; mavrinamarina@gmail.com)
[2] Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства им. П. Василенко
(Украина, 61002, Харьков, ул. Артема, 44,
тел. (057) 7123537, e-mail:s_koshman@ukr.net)

Метод исправления однократных ошибок данных, представленных кодом класса вычетов

Рассмотрен метод исправления однократных ошибок в классе вычетов (КВ). В результате анализа корректирующих возможностей арифметического кода установлено, что использование непозиционных кодовых структур в КВ весьма эффективно. Приведены примеры исправления однократных ошибок данных, представленных кодом КВ.

Розглянуто метод виправлення однократних помилок у класі лишків (КЛ). В результаті аналізу коригувальних можливостей арифметичного коду встановлено, що ефективність використання непозиційних кодових структур у КЛ достатньо висока. Наведено приклади виправлення однократних помилок даних, які представлено кодом КЛ.

Ключевые слова: непозиционная система счисления в классе вычетов, исправление однократных ошибок данных, арифметическое непозиционное кодирование информации.

Для контроля, диагностики и исправления ошибок данных, в общем случае, кодовая структура должна обладать определенной корректирующей способностью. Для этого необходимо ввести определенную информационную избыточность, т.е. применить метод информационного резервирования. Это в полной мере относится к непозиционной кодовой структуре (НКС) в классе вычетов (КВ) [1—3].

Для любого произвольного КВ величина избыточности $R = M_0 / M$ однозначно определяет корректирующие возможности непозиционного помехоустойчивого кода. Корректирующие коды в КВ могут иметь любые значения минимального кодового расстояния (МКР) $d_{\min}^{\text{КВ}}$. Это зависит от значения величины избыточности R. Известная [1] теорема устанавливает связь между избыточностью корректирующего кода, МКР и числом k

контрольных оснований КВ. Корректирующий код имеет значение $d_{\min}^{\text{КВ}}$ в случае, если степень избыточности не меньше произведения любых значений $d_{\min}^{\text{КВ}} - 1$ оснований КВ. С одной стороны, $R \geq \prod_{i=1}^{d_{\min}^{\text{КВ}}-1} m_{q_i}$, а с другой —

$$R = M_0 / M = \prod_{i=1}^{n+k} m_i \,/\, \prod_{i=1}^{n} m_i = \prod_{i=1}^{k} m_{n+i}.$$

В этом случае правомерно утверждать, что $d_{\min}^{\text{КВ}} - 1 = k$, или

$$d_{\min}^{\text{КВ}} = k + 1. \tag{1}$$

Существует два подхода к решению задачи обеспечения НКС в КВ необходимыми корректирующими свойствами.

П о д х о д 1. Зная требования к корректирующим свойствам НКС, например по числу обнаруживаемых $t_{\text{о}}$ или исправляемых $t_{\text{и}}$ ошибок, вводим, с учетом числа k или величины $\{m_{n+k}\}$ контрольных оснований, необходимую информационную избыточность, которая определяет значение $d_{\min}^{\text{КВ}}$ НКС в КВ. Тогда, в соответствии с теорией помехоустойчивого кодирования (ТПК), для упорядоченного ($m_i < m_{i+1}$) КВ находим

$$t_{\text{о}} \leq d_{\min}^{\text{КВ}} - 1, \tag{2}$$

$$t_{\text{о}} \leq k, \tag{3}$$

$$t_{\text{и}} \leq \left[\frac{d_{\min}^{\text{КВ}} - 1}{2} \right],$$

$$t_{\text{и}} \leq \left[\frac{k}{2} \right]. \tag{4}$$

П о д х о д 2. При заданной НКС $A_{\text{КВ}} = (a_1 \| a_2 \| \ldots \| a_{i-1} \| a_i \| a_{i+1} \| \ldots$ $\ldots \| a_n \| \ldots \| a_{n+k})$ (и заданном значении k) корректирующие возможности (определяемые значением $d_{\min}^{\text{КВ}}$) кода в КВ определяем в соответствии с выражениями (3), (4). Следует заметить, что если упорядоченный ($m_i < m_{i+1}$) КВ расширяется добавлением k контрольных оснований к n информационным модулям, то МКР $d_{\min}^{\text{КВ}}$ помехоустойчивого кода увеличивается на величину k (1).

Увеличить значения $d_{\min}^{\text{КВ}}$ можно также, уменьшая число n информационных оснований, т.е. посредством перехода к вычислениям с меньшей точностью. Очевидно, что между корректирующими возможностями помехоустойчивых кодов и точностью вычислений W в КВ существует обратно пропорциональная зависимость. Одна и та же ЭВМ может выполнять арифметические и другие операции с высокой точностью, но небольшой корректирующей способностью или с меньшей точностью, но с более высокой корректирующей возможностью по контролю, диагностике и исправлению ошибок данных, а также с более высоким быстродействием их обработки (время выполнения основных операций в КВ обратно пропорционально числу n информационных оснований) [2, 4, 5].

Проанализируем процесс возможной коррекции однократных ошибок данных в КВ при наличии минимальной информационной избыточности введением одного контрольного основания. В этом случае в соответствии с ТПК в КВ [1, 2] $d_{\min}^{\text{КВ}} = k + 1$. При $k = 1$ МКР $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2$, что, в соответствии с общей ТПК, позволит гарантированно обнаружить любую однократную ошибку (в одном из остатков a_i, $i = \overline{1, n+1}$) в НКС.

В общем случае процесс коррекции ошибок данных в КВ, как и в позиционной системе счисления (ПСС), состоит из трех этапов:

1) контроль данных (определение правильности или неправильности исходного числа $A_{\text{КВ}}$);

2) диагностика неправильного $\widetilde{A}_{\text{КВ}}$ числа (определение одного искаженного остатка $\widetilde{a}_i$ по основанию m_i КВ числа $\widetilde{A}_{\text{КВ}}$);

3) исправление неправильного остатка $\widetilde{a}_i$ на истинное a_i число, т.е. исправление неправильного $\widetilde{A}_{\text{КВ}}$ числа (получение правильного числа $A_{\text{КВ}} = \widetilde{A}_{\text{и}}$).

Степень информационной избыточности (корректирующие способности кода) оценивается величиной МКР $d_{\min}^{\text{ПСС}}$. Как указано выше, в КВ значение МКР определяется соотношением $d_{\min}^{\text{КВ}} = k + 1$, где k — число контрольных оснований в упорядоченном КВ.

Будем рассматривать НКС $A_{\text{КВ}} = (a_1 \| a_2 \| ... \| a_{i-1} \| a_i \| a_{i+1} \| ... \| a_n \| ... \| a_{n+k})$ в КВ с минимальной ($k = 1$) дополнительной информационной избыточностью. В этом случае $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2$.

В соответствии с общей ТПК в ПСС при МКР $d_{\min}^{\text{ПСС}} = 2$ в кодовой структуре однозначно (достоверно) определяется однократная ошибка. В ПСС под однократной ошибкой данных понимаем искажение одного бита информации типа $0 \to 1$ или $1 \to 0$. Для исправления этой однократной ошибки в ПСС необходимо обеспечить условие $d_{\min}^{\text{ПСС}} = 3$.

В КВ, в отличие от ПСС, под однократной ошибкой понимаем искажение одного остатка a_i по модулю m_i. Поскольку остаток a_i числа $A_{\text{КВ}} =$

$= (a_1 \| a_2 \| ... \| a_{i-1} \| a_i \| a_{i+1} \| ... \| a_n \| ... \| a_{n+k})$ по модулю m_i содержит $z =$ $= \{[\log_2(m_i - 1)] + 1\}$ двоичных разрядов, формально можно считать, что в КВ при $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2\ (k = 1)$ в пределах одного остатка a_i может быть обнаружен пакет, состоящий не более чем из z двоичных разрядов. Однако в [1, 2, 5] показано, что в некоторых случаях при $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2$ в КВ имеется возможность исправления однократных ошибок.

Учитывая специфику, свойства и особенности представления НКС в КВ, возможность исправления ошибок при $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2$ можно объяснить так:

1. Как указано выше, однократную ошибку в ПСС и КВ понимают по разному. Поэтому МКР $d_{\min}^{\text{ПСС}}$ и $d_{\min}^{\text{КВ}}$ имеют различную смысловую нагрузку и количественную оценку.

2. Существующая (в неявном виде) в НКС естественная (первичная, природная) информационная избыточность, имеющаяся в остатках $\{a_i\}$ в результате процедуры их формирования, начинает положительно проявляться (относительно повышения помехоустойчивости и достоверности передачи и обработки информации) только при наличии искусственной (вторичной) информационной избыточности, которая вводится в НКС при использовании k КВ (дополнительно к n информационным). Отличительной особенностью КВ является существенное проявление первичной информационной избыточности только при наличии вторичной в результате введения контрольных оснований.

3. В [1, 2, 5] показано, что корректирующий код в КВ с попарно простыми основаниями принимает значение $d_{\min}^{\text{КВ}}$ только в том случае, если степень информационной избыточности не меньше произведения любых $d_{\min}^{\text{КВ}} - 1$ оснований заданного КВ.

Наличие и взаимодействие первичной и вторичной информационной избыточности при проведении дополнительных процедур (использования временной избыточности) в процессе исправления ошибок обеспечивает, в некоторых случаях, возможность исправления однократных ошибок в КВ при $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2\ (k = 1)$.

Действительно, для упорядоченного КВ с учетом (3), (4) можно сделать следующие выводы: при одном ($k = 1$) контрольном основании КВ m_{n+1} НКС $A_{\text{КВ}} = (a_1 \| a_2 \| ... \| a_{i-1} \| a_i \| a_{i+1} \| ... \| a_n \| ... \| a_{n+1})$ может иметь различные значения $d_{\min}^{\text{КВ}}$. В данном случае это зависит от величины m_{n+1}. Если для каждого отдельного модуля КВ выполняется условие $m_i < m_{n+1}$, $i = \overline{1, n}$, то в соответствии с выражением (1) $d_{\min}^{\text{КВ}} = 2$ и, следовательно, в соответствии с выражением (2) $t_{\text{о}} = 1$. Если для совокупности $\{m_i\}$ информационных оснований для произвольной пары модулей выполняется условие $m_i m_j < m_{n+1}$, $i, j = \overline{1, n}$; $i \neq j$, то $d_{\min}^{\text{КВ}} = 3$ и $t_{\text{о}} = 2$.

Таблица 1

$m_k = m_{n+1} = m_5 = 61,\ d_{\min}^{\text{КВ}} = k+1 = 2$							$t_{\text{о}}$	$t_{\text{и}}$
$m_1 = 3$	$m_2 = 4$	$m_3 = 5$	$m_4 = 7$	$\prod_{r=1}^{k} m_{i_r} \le m_{n+1}$	k	$d_{\min}^{\text{КВ}} = k+1$		
+	–	–	–	$3<61$	1	2	1	0
–	+	–	–	$4<61$	1	2	1	0
–	–	+	–	$5<61$	1	2	1	0
–	–	–	+	$7<61$	1	2	1	0
+	+	–	–	$3\cdot 4=12<61$	2	3	2	1
+	–	+	–	$3\cdot 5=15<61$	2	3	2	1
+	–	–	+	$3\cdot 7=21<61$	2	3	2	1
–	+	+	–	$4\cdot 5=20<61$	2	3	2	1
–	+	–	+	$4\cdot 7=28<61$	2	3	2	1
–	–	+	+	$5\cdot 7=35<61$	2	3	2	1
+	+	+	–	$3\cdot 4\cdot 5=60<61$	3	4	3	2

Таким образом, для НКС в КВ при $k = 1$ величина $d_{\min}^{\text{КВ}}$ может быть различной в зависимости от величины m_{n+1} КВ. Пусть задан КВ информационными основаниями $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$ и пусть $m_k = m_{n+1} = m_5 = 11$. В этом случае можно выполнить достоверный контроль искажения одного любого остатка НКС.

Например, $m_k = m_{n+1} = 61$. Результаты исследований корректирующих возможностей помехоустойчивых кодов в КВ при $l = 1$ представлены в табл. 1, из которой видно, что специфика представления чисел в КВ позволяет в ряде случаев не только обнаружить ошибку, но и найти место ее возникновения, используя только одно контрольное основание. При существующих методах контроля и коррекции в ПСС это невозможно.

Пусть в неправильном числе $\widetilde{A} \ge M$ ошибка $\widetilde{a}_i = (a_i + \Delta a_i) \bmod m_i$ достоверно содержится в остатке a_i по модулю m_i. Рассмотрим соотношение, с помощью которого можно исправить ошибку в остатке $\widetilde{a}_i$ [1]. Очевидно, что $\widetilde{A} = (A + \Delta A) \bmod M_0$. Величину ошибки можно представить в виде $\Delta A = (0 \| 0 \| \ldots \| 0 \| \Delta a_i \| 0 \| \ldots \| 0 \| 0)$, тогда правильное число, $A < M$, имеет вид

$$A = (\widetilde{A} - \Delta A) \bmod M_0 = [(a_1 \| a_2 \| \ldots \| a_{i-1} \| \widetilde{a}_i \| a_{i+1} \| \ldots \| a_n \| a_{n+1}) -$$

$$-(0 \| 0 \| \ldots \| 0 \| \Delta a_i \| 0 \| \ldots \| 0 \| 0)] \bmod M_0 =$$

$$= [a_1 \| a_2 \| \ldots \| a_{i-1} \| (\widetilde{a}_i - \Delta a_i) \bmod m_i \| a_{i+1} \| \ldots \| a_n \| a_{n+1}] \bmod M_0.$$

Количественно оценим значение A. Поскольку число A — правильное, т.е. находится в числовом интервале [0, M), должно выполняться следующее неравенство:

$$A = (\widetilde{A} - \Delta A) \operatorname{mod} M_0 < M. \tag{5}$$

Величина ошибки составляет $\Delta A = \Delta a_i B_i$. Поэтому неравенство (5) примет вид

$$\widetilde{A} - \Delta a_i B_i - rM_0 < \frac{M_0}{m_{n+1}}, \quad r = 1, 2, 3, \dots ,$$

$$\widetilde{A} - (\widetilde{a}_i - a_i) B_i - rM_0 < \frac{M_0}{m_{n+1}}, \quad \widetilde{A} - (a_i - \widetilde{a}_i) B_i - rM_0 < \frac{M_0}{m_{n+1}},$$

$$(a_i - \widetilde{a}_i) B_i < \frac{M_0}{m_{n+1}} - \widetilde{A} + rM_0, \quad a_i - \widetilde{a}_i < \frac{(M_0 / m_{n+1})}{B_i} - \frac{\widetilde{A}}{B_i} + \frac{rM_0}{B_i}, \tag{6}$$

$$a_i < \widetilde{a}_i + \frac{(M_0 / m_{n+1})}{B_i} - \frac{\widetilde{A}}{B_i} + \frac{rM_0}{B_i}.$$

Учитывая, что ортогональный базис для модуля m_i КВ имеет вид $B_i = \overline{m}_i M_0 / m_i$, запишем выражение (6) в виде

$$a_i < \widetilde{a}_i + \frac{(m_i + r\, m_i m_{n+1})}{\overline{m}_i m_{n+1}} - \frac{\widetilde{A}}{B_i},$$

или

$$a_i < \widetilde{a}_i + \frac{m_i (1 + r\, m_{n+1})}{\overline{m}_i m_{n+1}} - \frac{\widetilde{A}}{B_i}. \tag{7}$$

Поскольку остаток a_i — натуральное число, значение $\frac{m_i (1 + r m_{n+1})}{\overline{m}_i m_{n+1}} - \frac{\widetilde{A}}{B_i}$ в выражении (7) должно быть целым числом. Поэтому, взяв целую часть последнего соотношения, получим формулу для исправления ошибки в остатке $\widetilde{a}_i$ числа $\widetilde{A}$ [1]:

$$a_i = \left(\widetilde{a}_i + \left[\frac{m_i (1 + r\, m_{n+1})}{\overline{m}_i m_{n+1}} - \frac{\widetilde{A}}{B_i} \right] \right) \operatorname{mod} m_i. \tag{8}$$

Рассмотрим примеры контроля и коррекции данных в КВ.

Пример 1. Осуществить контроль и, при необходимости, провести коррекцию числа $A_{\text{КВ}} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$, заданного в КВ с информационными, $m_1 = 3$, $m_2 = 4$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$, и контрольным, $m_k = m_5 = 11$, основаниями. При этом $M = \prod_{i=1}^{n} m_i = \prod_{i=1}^{4} m_i = 420$ и $M_0 = M\, m_{n+1} = 420 \cdot 11 = 4620$. Ортогональные базисы B_i, $i = \overline{1, n+1}$, КВ при $l = 1$ следующие:

$$B_1 = (1 \| 0 \| 0 \| 0 \| 0) = 1540, \ \overline{m}_1 = 1,$$

$$B_2 = (0 \| 1 \| 0 \| 0 \| 0) = 3465, \ \overline{m}_2 = 3,$$

$$B_3 = (0 \| 0 \| 1 \| 0 \| 0) = 3696, \ \overline{m}_3 = 4,$$

$$B_4 = (0 \| 0 \| 0 \| 1 \| 0) = 2640, \ \overline{m}_4 = 4,$$

$$B_5 = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 1) = 2520, \ \overline{m}_5 = 6.$$

I. К о н т р о л ь д а н н ы х $A_{\text{КВ}} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. В соответствии с процедурой контроля [1] определим

$$A_{\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i B_i \right) \bmod M_0 = \left(\sum_{i=1}^{5} a_i B_i \right) \bmod M_0 =$$

$$= (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5) \bmod M_0 =$$

$$= (0 \cdot 1540 + 0 \cdot 3465 + 0 \cdot 3696 + 0 \cdot 2640 + 5 \cdot 2520) \bmod 4620 =$$

$$= (5 \cdot 2520) \bmod 4620 = 12600 (\bmod 4620) = 3360 > 420.$$

Таким образом, определено, что $A_{\text{КВ}} = 3360 > M = 420$. В этом случае, при возможности возникновений только однократных ошибок, делается вывод о том, что рассматриваемое число $\widetilde{A}_{3360} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$ — неправильное ($3360 > M = 420$). Для исправления числа $\widetilde{A}_{3360} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$ вначале необходимо провести диагностику данных, т.е. определить искаженный остаток $\widetilde{a}_i$, затем определить истинное значение a_i остатка по модулю m_i и после этого выполнить исправление искаженного остатка $\widetilde{a}_i$.

II. Д и а г н о с т и к а д а н н ы х $\widetilde{A}_{3360} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. В соответствии с методом проекций [1, 2] составим возможные проекции $\widetilde{A}_j$ числа $\widetilde{A}_{3360} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$:

$$\widetilde{A}_1 = (0 \| 0 \| 0 \| 5), \quad \widetilde{A}_2 = (0 \| 0 \| 0 \| 5), \quad \widetilde{A}_3 = (0 \| 0 \| 0 \| 5),$$

$$\widetilde{A}_4 = (0 \| 0 \| 0 \| 5), \quad \widetilde{A}_5 = (0 \| 0 \| 0 \| 0).$$

Формула для вычисления значений $\widetilde{A}_{j\,\text{ПСС}}$ проекций числа в ПСС имеет следующий вид [1]:

$$\widetilde{A}_{j\,\text{ПСС}} = \left(\sum_{\substack{i=1;\\ j=\overline{1,\, n+1}}}^{n} a_i B_{ij} \right) \operatorname{mod} M_j = (a_1 B_{1j} + a_2 B_{2j} + \ldots + a_n B_{nj}) \operatorname{mod} M_j . \quad (9)$$

По формуле (9) вычислим все значения $\widetilde{A}_{j\,\text{ПСС}}$. Затем проведем $(n+1)$ сравнение чисел $\widetilde{A}_{j\,\text{ПСС}}$ с числом $M = M_0 / m_{n+1}$. Если среди проекций $\widetilde{A}_i$ есть числа, не находящиеся внутри информационного числового интервала $[0, M)$ (т.е. $\widetilde{A}_k \geq M$), содержащего k правильных чисел, то делается вывод о том, что эти k остатков числа A не искажены. Ошибочными могут быть только остатки, находящиеся среди остальных $[(n+1)-k]$ остатков числа $\widetilde{A}_{\text{КВ}}$. Набор частных рабочих оснований для заданного КВ и совокупность частных B_{ij} ортогональных базисов (при $l=1$) представлены в табл. 2.

Итак,

$$\widetilde{A}_{1\,\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i B_{i1} \right) \operatorname{mod} M_1 = (a_1 B_{11} + a_2 B_{21} + a_3 B_{31} + a_4 B_{41}) \operatorname{mod} M_1 =$$

$$= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 616 + 0 \cdot 1100 + 5 \cdot 980) \operatorname{mod} 1540 = 280 < 420,$$

где остаток a_1 числа $\widetilde{A}_1$, возможно $\overline{a}_1$, — искаженный остаток;

$$\widetilde{A}_{2\,\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i B_{i2} \right) \operatorname{mod} M_2 = (a_1 B_{12} + a_2 B_{22} + a_3 B_{32} + a_4 B_{42}) \operatorname{mod} M_2 =$$

$$= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 231 + 0 \cdot 330 + 5 \cdot 210) \operatorname{mod} 1155 = 1050 > 420,$$

где a_2 — достоверно неискаженный остаток;

Таблица 2

j	$\{m_i\}$ при i				M_j	$\{B_{ij}\}$ при i			
	m_1	m_2	m_3	m_4		1	2	3	4
1	4	5	7	11	1540	385	616	1100	980
2	3	5	7	11	1155	385	231	330	210
3	3	4	7	11	924	616	693	792	672
4	3	4	5	11	660	220	165	396	540
5	3	4	5	7	420	280	105	336	120

$$\widetilde{A}_{3\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i B_{i3} \right) \mathrm{mod}\, M_3 = (a_1 B_{13} + a_2 B_{23} + a_3 B_{33} + a_4 B_{43}) \mathrm{mod}\, M_3 =$$

$$= (0 \cdot 616 + 0 \cdot 693 + 0 \cdot 792 + 5 \cdot 672)\, \mathrm{mod}\, 924 = 588 > 420,$$

где a_3 — достоверно неискаженный остаток;

$$\widetilde{A}_{4\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i B_{i4} \right) \mathrm{mod}\, M_4 = (a_1 B_{14} + a_2 B_{24} + a_3 B_{34} + a_4 B_{44})\, \mathrm{mod}\, M_4 =$$

$$= (0 \cdot 220 + 0 \cdot 165 + 0 \cdot 369 + 5 \cdot 540)\, \mathrm{mod}\, 660 = 60 < 420,$$

где остаток a_4 по модулю m_4 числа $\widetilde{A}_4$, возможно $\overline{a}_4$, — искаженный остаток;

$$\widetilde{A}_{5\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{4} a_i B_{i5} \right) \mathrm{mod}\, M_5,$$

где $M_5 = M = 420$, поэтому остаток $\overline{a}_5$ по контрольному модулю $m_k = m_5$ всегда будет в совокупности возможных $\overline{a}_i$ искаженных остатков числа в КВ.

О б щ и й в ы в о д. В процессе диагностики данных, представленных НКС $\widetilde{A} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$, определились точно неискаженные остатки: $a_2 = 0$ и $a_3 = 0$. Ошибочными могут быть остатки по основаниям m_1, m_4 и m_5, т.е. остатки $\overline{a}_1 = 0$, $\overline{a}_4 = 0$ и $\overline{a}_5 = 5$. В этом случае необходимо выполнить исправление остатков $\overline{a}_1$, $\overline{a}_4$ и $\overline{a}_5$.

III. И с п р а в л е н и е о ш и б о к д а н н ы х $\widetilde{A}_{3360} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. Выполнив по известной формуле (8) исправление возможно искаженных $\overline{a}_1$, $\overline{a}_4$ и $\overline{a}_5$ остатков a_1, a_4 и a_5 при $r = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$a_1 = \left(\overline{a}_1 + \left[\frac{m_1(1 + r\, m_{n+1})}{m_{n+1} \overline{m}_1} - \frac{\widetilde{A}}{B_1} \right] \right) \mathrm{mod}\, m_1 = \left(0 + \left[\frac{3(1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 1} - \frac{3360}{1540} \right] \right) \mathrm{mod}\, 3 =$$

$$= (0 + [3{,}27 - 2{,}18])\, \mathrm{mod}\, 3 = (0 + [1{,}09])\, \mathrm{mod}\, 3 = (0 + 1)\, \mathrm{mod}\, 3 = 1;$$

$$a_4 = \left(\overline{a}_4 + \left[\frac{m_4(1 + r\, m_{n+1})}{m_{n+1} \overline{m}_4} - \frac{\widetilde{A}}{B_4} \right] \right) \mathrm{mod}\, m_4 = \left(0 + \left[\frac{7 \cdot 12}{11 \cdot 4} - \frac{3360}{2640} \right] \right) \mathrm{mod}\, 7 =$$

$$= (0 + [1{,}9 - 1{,}27])\, \mathrm{mod}\, 7 = (0 + [0{,}63])\, \mathrm{mod}\, 7 = (0 + 0)\, \mathrm{mod}\, 7 = 0;$$

$$a_5 = \left(\overline{a}_5 + \left[\frac{m_{n+1}(1 + r m_{n+1})}{m_{n+1} \overline{m}_{n+1}} - \frac{\widetilde{A}}{B_5} \right] \right) \mathrm{mod}\, m_{n+1} = \left(5 + \left[\frac{11 \cdot (1 + 11)}{11 \cdot 6} - \frac{3360}{2520} \right] \right) \mathrm{mod}\, 11 =$$

$$= (5 + [2 - 1{,}3])\, \mathrm{mod}\, 11 = (5 + [0{,}7])\, \mathrm{mod}\, 11 = (5 + 0)\, \mathrm{mod}\, 5 = 0.$$

По остаткам $a_1 = 1$, $a_4 = 0$ и $a_5 = 0$ восстанавливаем (исправляем) искаженное число $\widetilde{A}_{3360} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. Правильное число будет иметь вид $\widetilde{A}_{\text{и}} = (1 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$.

Для проверки исправленных данных по формуле (8) определим значение числа $\widetilde{A}_{\text{и}} = (1 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$:

$$\widetilde{A}_{\text{и ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{5} a_i B_i \right) \operatorname{mod} M_0 = (a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 + a_5 B_5) \operatorname{mod} M_0 =$$

$$= (1 \cdot 1540 + 0 \cdot 3465 + 0 \cdot 3696 + 0 \cdot 2640 + 5 \cdot 2520) \operatorname{mod} 4620 =$$

$$= 14140 (\operatorname{mod} 4620) = 280 .$$

Поскольку $280 < M = 420$, число $\widetilde{A}_{280} = (1 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$ — правильное.

Для уточнения правильности процедуры коррекции числа $\widetilde{A}_{3360}$ выполним расчет и сравним полученные значения с правильными остатками $a_2 = 0$, $a_3 = 0$. Получаем

$$a_2 = \left(0 + \left[\frac{4(1+11)}{11 \cdot 3} - \frac{3360}{3465} \right] \right) \operatorname{mod} 4 = 0 ,$$

$$a_3 = \left(0 + \left[\frac{5(1+11)}{11 \cdot 4} - \frac{3360}{3696} \right] \right) \operatorname{mod} 5 = 0.$$

Полученные результаты расчетов остатков по модулям m_2 и m_3 КВ подтверждают правильность коррекции неправильного числа $\widetilde{A}_{3360} =$ $= (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. Таким образом, исходное число $\widetilde{A}_{\text{КВ}} = (0 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$ является неправильным $\widetilde{A}_{3360}$, в котором однократная ошибка $\Delta a_1 = 1$ произошла по модулю m_1. Данная ошибка перевела правильное число A_{280} в неправильное $\widetilde{A}_{3360}$.

Для того чтобы выяснить, является ли правильное число A_{280} истинным, проведем дополнительные исследования процессов искажения и коррекции числа A_{280} по основанию $m_1 = 3$. Число $N_{\text{н.с}}$ возможных неправильных (искаженных) $\widetilde{A}_{\text{КВ}}$ кодовых слов (только при однократной ошибке) для каждого правильного числа $A_{\text{КВ}}$ составляет $N_{\text{н.с}} = \sum_{i=1}^{n+1} m_i - (n+1)$. В результате анализа установлено, что искажение остатка a_1 по модулю $m_1 = 3$ правильного числа A_{280} может привести только к двум неправильным числам: $\widetilde{A}_{3360} = (\widetilde{0} \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$ и $\widetilde{A}_{1820} = (\widetilde{2} \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. Этот факт свидетельствует о том, что исправленное число $A_{и} = A_{280} = (1\|0\|0\|0\|5)$ является не только правильным (лежащим в интервале [0, 420)), но и истинным.

Истинность полученного числа $A_{280} = (\hat{1}\|0\|0\|0\|5)$ подтверждается тем, что только однократная ошибка $\Delta a_1 = 2$ по основанию $m_1 = 3$ переводит это число,

$$\widetilde{A} = (A + \Delta A) \bmod M_0 = (1\|0\|0\|0\|5) + (2\|0\|0\|0\|0) =$$

$$= [(1+2) \bmod 3\|0\|0\|0\|5] = (\widetilde{0}\|0\|0\|0\|5),$$

в единственно неправильное число $\widetilde{A}_{3360} = (\widetilde{0}\|0\|0\|0\|5)$.

Пример 2. Пусть $A_{280} = (1\|0\|0\|0\|5)$ — правильное число и $\Delta a_1 = 1$. Тогда

$$\widetilde{A} = (A + \Delta A) \bmod M_0 = (1\|0\|0\|0\|5) + (1\|0\|0\|0\|0) =$$

$$= [(1+1) \bmod 3\|0\|0\|0\|5] = (\widetilde{2}\|0\|0\|0\|5).$$

Данному числу в КВ соответствует число 1820 в ПСС, т.е. число $\widetilde{A}_{1820}$ — неправильное. Выполним исправление числа $\widetilde{A}_{1820}$.

Перед исправлением числа $\widetilde{A}_{1820}$ проведем диагностику данных. Для этого предварительно составим проекции A_j, $j = \overline{1,5}$, числа $\widetilde{A}_{1820} = (2\|0\|0\|0\|5)$. Это будут следующие кодовые структуры в КВ: $\widetilde{A}_1 = (0\|0\|0\|5)$, $\widetilde{A}_2 = (2\|0\|0\|5)$, $\widetilde{A}_3 = (2\|0\|0\|5)$, $\widetilde{A}_4 = (2\|0\|0\|5)$, $\widetilde{A}_5 = (2\|0\|0\|0)$. Затем определим все значения проекций $\widetilde{A}_{j\,\text{ПСС}}$:

$$\widetilde{A}_{1\,\text{ПСС}} = (5 \cdot 980) \bmod 1540 = 280 < 420 = M,$$

$$\widetilde{A}_{2\,\text{ПСС}} = (2 \cdot 385 + 5 \cdot 231) \bmod 1155 = 1925 (\bmod 1155) = 770 > 420 = M,$$

$$\widetilde{A}_{3\,\text{ПСС}} = (2 \cdot 616 + 5 \cdot 672) \bmod 924 = 4592 (\bmod 924) = 896 > 420 = M,$$

$$\widetilde{A}_{4\,\text{ПСС}} = (2 \cdot 220 + 5 \cdot 540) \bmod 660 = 3140 (\bmod 660) = 500 > 420 = M,$$

$$\widetilde{A}_{5\,\text{ПСС}} = 2 \cdot 280 (\bmod 420) = 560 (\bmod 420) = 140 < 420 = M.$$

Поскольку $\widetilde{A}_{2\,\text{ПСС}}, \widetilde{A}_{3\,\text{ПСС}}, \widetilde{A}_{4\,\text{ПСС}} > 420$, можно сделать вывод о том, что остатки $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$ числа $\widetilde{A}_5 = (2\|0\|0\|0\|5)$ не искажены. Искаженными $\overline{a}_1 = 2$ и $\overline{a}_5 = 5$ могут быть только остатки a_1 и a_5. Вначале проведем исправление остатка $\overline{a}_1 = 2$:

$$a_1 = \left(\overline{a}_1 + \left[\frac{m_1(1 + r\, m_{n+1})}{m_{n+1}\overline{m}_1} - \frac{\widetilde{A}}{B_1}\right]\right) \bmod m_1 = \left(2 + \left[\frac{3 \cdot (1+11)}{11 \cdot 1} - \frac{1820}{1540}\right]\right) \bmod 3 =$$

$$= (2 + [3{,}27 - 1{,}18]) \bmod 3 = (2 + [2{,}09]) \bmod 3 = (2+2) \bmod 3 = (4) \bmod 3 = 1.$$

Следовательно, исправленный остаток по модулю m_1 есть $a_1 = 1$.

Аналогично получим значение $a_5 = 5$. Согласно полученным остаткам a_1, a_5 исправляем неправильное число $\widetilde{A}_{1820} = (\widetilde{2} \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$. В конечном итоге в процессе коррекции получим правильное число $A_{280} = (1 \| 0 \| 0 \| 0 \| 5)$.

Пример 3. Осуществим контроль числа $A_{\text{КВ}} = (0 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1)$. В случае его искажения проведем диагностику и коррекцию данных.

I. Контроль данных $A_{\text{КВ}} = (0 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1)$. В соответствии с известной процедурой контроля определим $A_{\text{ПСС}}$ по формуле

$$A_{\text{ПСС}} = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i B_i\right) \mathrm{mod}\, M_0 = (0 \cdot 1540 + 0 \cdot 3465 + 0 \cdot 3696 +$$

$$+ 2 \cdot 2640 + 1 \cdot 2520) \,\mathrm{mod}\, 4620 = 7800 (\mathrm{mod}\, 4620) = 3180 > 420\,.$$

Число $\widetilde{A}_{3180}$ — неправильное.

II. Диагностика данных $\widetilde{A}_{3180} = (0 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1)$. Составим все возможные проекции $\widetilde{A}_j$ числа $\widetilde{A}_{3180}$:

$$\widetilde{A}_1 = (0 \| 0 \| 2 \| 1),\ \widetilde{A}_2 = (0 \| 0 \| 2 \| 1),$$

$$\widetilde{A}_3 = (0 \| 0 \| 2 \| 1),\ \widetilde{A}_4 = (0 \| 0 \| 0 \| 1),\ \widetilde{A}_5 = (0 \| 0 \| 0 \| 2).$$

Определим величины пяти проекций $\widetilde{A}_j$ в ПСС:

$$\widetilde{A}_{1\,\text{КВ}}(0 \| 0 \| 2 \| 1) = \widetilde{A}_{1\,\text{ПСС}} = (a_1 B_{11} + a_2 B_{21} + a_3 B_{31} + a_4 B_{41}) \,\mathrm{mod}\, M_1 =$$

$$= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 616 + 2 \cdot 1100 + 1 \cdot 980) \,\mathrm{mod}\, 1540 = 100 < M = 420\,,$$

$$\widetilde{A}_{2\,\text{КВ}}(0 \| 0 \| 2 \| 1) = \widetilde{A}_{2\,\text{ПСС}} = (a_1 B_{12} + a_2 B_{22} + a_3 B_{32} + a_4 B_{42}) \,\mathrm{mod}\, M_2 =$$

$$= (0 \cdot 385 + 0 \cdot 231 + 2 \cdot 330 + 1 \cdot 210) \,\mathrm{mod}\, 1155 = 870 > M = 420\,,$$

$$\widetilde{A}_{3\,\text{КВ}}(0 \| 0 \| 2 \| 1) = \widetilde{A}_{3\,\text{ПСС}} = (a_1 B_{13} + a_2 B_{23} + a_3 B_{33} + a_4 B_{43}) \,\mathrm{mod}\, M_3 =$$

$$= (0 \cdot 616 + 0 \cdot 693 + 2 \cdot 792 + 1 \cdot 672) \,\mathrm{mod}\, 924 = 418 < M = 420\,,$$

$$\widetilde{A}_{4\,\text{КВ}}(0 \| 0 \| 0 \| 1) = \widetilde{A}_{4\,\text{ПСС}} = (a_1 B_{14} + a_2 B_{24} + a_3 B_{34} + a_4 B_{44}) \,\mathrm{mod}\, M_4 =$$

$$= (0 \cdot 220 + 0 \cdot 165 + 2 \cdot 369 + 1 \cdot 540) \,\mathrm{mod}\, 660 = 540 > M = 420\,,$$

$$\widetilde{A}_{5\,\text{КВ}}(0 \| 0 \| 0 \| 2) = \widetilde{A}_{5\,\text{ПСС}} = (a_1 B_{15} + a_2 B_{25} + a_3 B_{35} + a_4 B_{45}) \,\mathrm{mod}\, M_5 =$$

$$= (0 \cdot 280 + 0 \cdot 105 + 2 \cdot 336 + 1 \cdot 120) \,\mathrm{mod}\, 420 = 240 < M = 420.$$

Сравнивая значения $\widetilde{A}_{j\,\text{ПСС}}$, полученные в результате расчетов, с величиной длины интервала $[0,420)$ обработки правильных чисел $A_{\text{КВ}}$ $M = 420$, можно сделать вывод, о том, что совокупность остатков $a_2 = 0$, $a_4 = 0$ является правильной (остатки не искажены), а остатки $\overline{a}_1 = 0$, $\overline{a}_3 = 0$, $\overline{a}_5 = 1$ неправильного числа $\widetilde{A}_{3180} = (\,0 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1\,)$ могут быть искажены (могут быть неправильными).

III. Исправление возможно искаженных $\overline{a}_1, \overline{a}_3, \overline{a}_5$, остатков числа $\widetilde{A}_{3180}$. Исправим возможно искаженные остатки $\overline{a}_1 = 0$, $\overline{a}_3 = 0$, $\overline{a}_5 = 1$ по формуле (8). Тогда

$$a_1 = \left(\overline{a}_1 + \left[\frac{m_1(1 + r\, m_{n+1})}{m_{n+1}\overline{m}_1} - \frac{\widetilde{A}}{B_1} \right] \right) \mathrm{mod}\, m_1 = \left(0 + \left[\frac{3\,(1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 1} - \frac{3180}{1540} \right] \right) \mathrm{mod}\, 3 =$$

$$= (0 + [3{,}27 - 2{,}06])\ \mathrm{mod}\, 3 = (0 + [1{,}21])\,\mathrm{mod} 3 = (0 + 1)\ \mathrm{mod} 3 = 1\,.$$

Следовательно, $a_1 = 1$. Для $\overline{a}_3$ запишем

$$a_3 = \left(\widetilde{a}_3 + \left[\frac{m_3(1 + r\, m_{n+1})}{m_{n+1}\overline{m}_3} - \frac{\widetilde{A}}{B_3} \right] \right) \mathrm{mod}\, m_3 = \left(0 + \left[\frac{5\,(1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 4} - \frac{3180}{3696} \right] \right) \mathrm{mod} 5 =$$

$$= (0 + [1{,}36 - 0{,}86])\ \mathrm{mod} 5 = (0 + [0{,}5])\,\mathrm{mod} 5 = (0 + 0)\ \mathrm{mod} 5 = 0\,.$$

В этом случае $a_3 = 0$. Для остатка $\overline{a}_5$ получим

$$a_5 = \left(\widetilde{a}_5 + \left[\frac{m_5(1 + r\, m_{n+1})}{m_{n+1}\overline{m}_5} - \frac{\widetilde{A}}{B_5} \right] \right) \mathrm{mod}\, m_5 = \left(1 + \left[\frac{11 \cdot (1 + r \cdot 11)}{11 \cdot 6} - \frac{3180}{2520} \right] \right) \mathrm{mod} 11 =$$

$$= (1 + [2 - 1{,}26])\ \mathrm{mod}\, 11 = (1 + [0{,}74])\ \mathrm{mod}\, 11 = (1 + 0)\ \mathrm{mod}\, 11 = 1\,.$$

Следовательно, $a_5 = 1$. По найденным значениям $a_1 = 1$, $a_3 = 0$, $a_5 = 1$ восстановленных остатков исправляем искаженное число $\widetilde{A}_{\text{КВ}} = (\,0 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1\,)$ на правильное: $A_{\text{КВ}} = (\,1 \| 0 \| 0 \| 2 \| 1\,)$. В результате проверки получаем $100 < 420$.

Выводы

Результаты проведенных исследований позволяют сделать вывод о том, что, в отличие от кодов ПСС, арифметические коды в КВ обладают дополнительными корректирующими возможностями. Однако для исправления однократных ошибок требуется выполнение дополнительных процедур обработки данных, т.е. кроме информационного резервирования необходимо применение временного резервирования. Приведенные примеры исправления однократных ошибок свидетельствуют о практической реализуемости рассмотренного метода исправления ошибок данных.

The method of correction of single errors in the residue class (RC) is considered in the article. The results of analysis of arithmetic code correcting possibilities showed high efficiency of the use of position-independent code structures in RC. Examples of correction of the data single errors presented by the RC code are given in the article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акушский И.Я., Юдицкий Д.И.* Машинная арифметика в остаточных классах. — М. : Сов. радио, 1968. — 440 с.
2. *Торгашов В.А.* Система остаточных классов и надежность ЦВМ. — М. : Сов. радио, 1973. — 118 с.
3. *ДСТУ* 2606-94. Средства вычислительной техники. Отказоустойчивость и живучесть. Общие технические требования.
4. *Краснобаев В.А.* Надежностная модель ЭВМ в системе остаточных классов // Электрон. моделирование. — 1985. — № 4. — С. 44 — 46.
5. *Барсов В.И., Краснобаев В.А., Сиора А.А., Авдеев И.В.* Методы многоверсионной обработки информации в модулярной арифметике. — Харьков : МОН, УИПА, 2008. — 460 с.

Поступила 12.02.13

КРАСНОБАЕВ Виктор Анатольевич, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой компьютерной инженерии Полтавского национального технического университета им. Ю. Кондратюка. В 1973 г. окончил Харьковское высшее военное училище им. Н.И. Крылова. Область научных исследований — разработка методов и средств обработки информации на основе использования непозиционных кодовых структур в классе вычетов.

КОШМАН Сергей Александрович, канд. техн. наук, доцент кафедры автоматизации и компьютерно-интегрированных технологий, доцент Харьковского национального технического университета сельского хозяйства им. П. Василенко, который окончил в 2000 г. Область научных исследований — разработка методов и средств обработки информации на основе использования непозиционных кодовых структур в классе вычетов.

МАВРИНА Марина Алексеевна, магистрант кафедры компьютерной инженерии Полтавского национального технического университета им. Ю. Кондратюка. Область научных исследований — разработка методов контроля и коррекции ошибок в классе вычетов.