УДК [519.876.5:530.182]:553.98

А.Я. Бомба, д-р техн. наук,
А.М. Синчук, С.В. Ярощак, канд. техн. наук
Ривнэнский государственный гуманитарный университет
(Украина, 33028, Ривнэ, ул. Остафова, 31,
тел. (067) 9986498, e-mail: sinchukk@mail.ru)

Метод комплексного анализа исследований двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидроразрыва

Разработанный метод комплексного анализа обобщен на исследование поведения элементов системы скважина—трещина—пласт с учетом изменения насыщенности при двухфазной фильтрации в однородном горизонтальном пласте в случае интенсификации притока пластовой жидкости к скважине вследствие возмущения течения трещинами гидроразрыва пласта.

Розроблений метод комплексного аналізу узагальнено на дослідження поведінки елементів системи свердловина—тріщина—пласт з врахуванням зміни насиченості при двофазній фільтрації в однорідному горизонтальному пласті у випадку інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини внаслідок збурення течії тріщинами гідророзриву пласта.

К л ю ч е в ы е с л о в а: квазиконформное отображение, двухфазная фильтрация, трещины гидроразрыва, численные методы.

Для вовлечения дополнительных запасов и рентабельной разработки месторождений с низкими фильтрационно-емкостными свойствами (в частности, значительной плотностью породы и низкой пористостью), что является одной из причин высокого фильтрационного сопротивления, требуется проведение интенсификации добычи нефти уже на начальной стадии разработки [1]. Одним из наиболее эффективных способов увеличения добычи является гидравлический разрыв пласта (ГРП), который обеспечивает расширение области его дренирования скважиной и формирует ее связь (через образованные трещины разрыва) с зонами повышенной проницаемости и системой существующих трещин. Одновременно для поддержания пластового давления (компенсации отборов) используется технология заводнения пласта, в результате чего нефть вытесняется нагнетаемой водой под давлением [1—3].

При такой схеме разработки пласта в нем происходят сложные процессы, порожденные взаимодействием подвижных фаз между собой и скелетом пласта с искусственно созданными зонами высокой проницаемости (трещины ГРП), что, в свою очередь, требует построения математических моделей, учитывающих особенности протекания таких процессов, и создания численных методов с последующей их реализацией в виде программного обеспечения для количественного и качественного анализа поведения системы скважина—трещина—пласт при двухфазной фильтрации.

Описанный в [4, 5] метод комплексного анализа обобщим на исследование поведения элементов системы скважина—трещина—пласт.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу моделирования процесса двухфазной фильтрации при вытеснении одной жидкости другой в горизонтальном неоднородном пласте $G_z (z = x + iy)$, ограниченном непроницаемым внешним контуром L, контурами нагнетательной L_* и эксплуатационной L^* скважин (рис. 1, см. вклейку), когда фильтрационное поле возмущено трещинами ГРП:

$$G_z^0 = \frac{G_z}{\bigcup\limits_{\lambda} G_z^{\lambda}}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \ldots .$$

Закон движения и уравнение неразрывности двухфазного фильтрационного течения относительно квазипотенциала скорости фильтрации $\varphi = \varphi\,(x, y, t) = -p\,(x, y, t) + \widetilde{p}$, где $p\,(x, y, t)$ — давление в точке (x, y) в момент времени t; $\widetilde{p}$ — некоторое характерное его значение, согласно [6—9] представим соответственно в виде

$$\boldsymbol{\upsilon}_{\widetilde{l}} = \frac{k\widetilde{k}_{\widetilde{l}}}{\mu_{\widetilde{l}}} \operatorname{grad} \varphi, \quad \frac{\partial\,(\sigma s_{\widetilde{l}})}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{\upsilon}_{\widetilde{l}} = 0, \quad \sum_{\widetilde{l}=1}^{2} s_{\widetilde{l}} = 1, \quad \widetilde{l} = 1, 2,$$

где σ — пористость грунта; $s_{\widetilde{l}} = s_{\widetilde{l}}(x, y, t)$, $\mu_{\widetilde{l}}$, $\boldsymbol{\upsilon}_{\widetilde{l}}$ — насыщенность пласта, динамическая вязкость и вектор скорости $\widetilde{l}$-й фазы; $\widetilde{k}_1$, $\widetilde{k}_2$ — относительные фазовые проницаемости (заданные функции насыщенности), $\widetilde{k}_1 = \widetilde{k}_1(s)$, $\widetilde{k}_2 = \widetilde{k}_2(s)$; $s = s_2 = 1 - s_1$); k — абсолютный коэффициент проницаемости пласта,

$$k = k\,(x, y) = \begin{cases} k_{\lambda}\,, (x, y) \in G_z^{\lambda}, \\ k_*\,, (x, y) \in G_z^0; \end{cases}$$

G_z^{λ} — участок пласта, соответствующий трещине с индексом λ ($k_{\lambda} = \text{const}$).

С учетом суммарной скорости $\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_1 + \boldsymbol{\upsilon}_2$ фильтрационного течения находим:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\upsilon} = 0, \quad \boldsymbol{\upsilon} = \bar{k}(s) \operatorname{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{\upsilon} \operatorname{grad} f(s) = 0,$$

где

$$\bar{k}(s) = \frac{k\widetilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k\widetilde{k}_2(s)}{\mu_2}, \quad f(s) = \frac{\mu_1 \widetilde{k}_2(s)}{\mu_2 \widetilde{k}_1(s) + \mu_1 \widetilde{k}_2(s)}.$$

Будем полагать, что на нагнетательной L_* и эксплуатационной L^* скважинах поддерживается постоянное давление (соответствующие квазипотенциалы φ_*, φ^*), на границе ∂G_z^λ трещин ГРП выполняются условия непрерывности потока и давления, а другие участки границы области G_z определяются линиями течения, вдоль которых справедливо равенство $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_L = 0$, где

$$L = \{z : x = x_0(\tau),\ y = y_0(\tau),\ \alpha_0 \le \tau \le \beta_0\} = \{z : f(x, y) = 0\};$$

$$L_* = \{z : x = x_*(\tau),\ y = y_*(\tau),\ \alpha_* \le \tau \le \beta_*\} = \{z : f_*(x, y) = 0\};$$

$$L^* = \{z : x = x^*(\tau),\ y = y^*(\tau),\ \alpha^* \le \tau \le \beta^*\} = \{z : f^*(x, y) = 0\}.$$

Первоначальное распределение насыщенности в пласте и ее значение на нагнетательной скважине обозначим соответственно через $s(x, y, 0) = \widetilde{s}(x, y)$ и $s|_{L_*} = s_*$. Аналогично [5—8], введя функцию течения $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряженную с $\varphi = \varphi(x, y)$, и осуществив условные разрезы Γ_*, Γ^* области G_z вдоль линий раздела течения, определяемых точками «приостановки» течения $\underline{A}(x_0^*, y_0^*) = \underline{B}(x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C}(x_*^0, y_*^0) = \underline{D}(x_*^0, y_*^0) \in L$ и соответствующими точками $A(x_*, y_*) = B(x_*, y_*) \in L_*$, $C(x^*, y^*) = D(x^*, y^*) \in L^*$, задачу построения гидродинамической сетки, определения фильтрационного расхода и других характерных фильтрационных параметров по найденному (фиксированному в данный момент времени) полю насыщенности сводим к задаче квазиконформного отображения $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [10] образованной при этом односвязной области $\widetilde{G}_z = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на соответствующую прямоугольную область комплексного квазипотенциала $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in \widetilde{G}_z, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{L^*}=\varphi^*,\quad \psi|_{AD}=0,\quad \psi|_{BC}=Q,$$

$$[\varphi]|_{\partial D_\lambda}=0,\quad [\upsilon_n]|_{\partial D_\lambda}=0,\quad \upsilon(x_0^*,y_0^*)=0,\quad \upsilon(x_*^0,y_*^0)=0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{\bar{k}}{\sigma}\frac{\partial f}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}\right),\quad s|_{L_*}=s_*,\quad s(x,y,t)|_{t=0}=\tilde{s}(x,y), \tag{2}$$

где $Q=\oint\limits_{L_*}-\upsilon_y dx+\upsilon_x dy$; $\upsilon(x,y)=\sqrt{\upsilon_x^2(x,y)+\upsilon_y^2(x,y)}$; $[\cdot]|_{\partial D_\lambda}$ — скачок соответствующей функции на ∂D_λ.

Обратную (1) краевую задачу о квазиконформном отображении области G_ω на G_z и соответствующие уравнения для действительной $x=x(\varphi,\psi)$ и мнимой $y=y(\varphi,\psi)$ частей (выполнение которых требуется и на разрезах для учета их раздвоения при переходе области G_z на G_ω) характеристической функции течения $z=z(\omega)=x(\varphi,\psi)+iy(\varphi,\psi)$ запишем в следующем виде:

$$\bar{k}\frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi},\quad \bar{k}\frac{\partial x}{\partial\psi}=-\frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad (\varphi,\psi)\in G_\omega; \tag{3}$$

$$f_*(x(\varphi_*,\psi),y(\varphi_*,\psi))=0,\ f^*(x(\varphi^*,\psi),y(\varphi^*,\psi))=0,\ 0\le\psi\le Q,$$

$$f(x(\varphi,0),\ y(\varphi,0))=0,\quad f(x(\varphi,Q),\ y(\varphi,Q))=0,\quad \varphi_*\le\varphi\le\varphi^*,$$

$$x(\varphi,0)=x(\varphi,Q),\quad y(\varphi,0)=y(\varphi,Q),\quad \varphi_*<\varphi\le\underline{\varphi},\quad \overline{\varphi}\le\varphi<\varphi^*,$$

$$\upsilon(x(\underline{\varphi},\tilde{\psi}),\ y(\underline{\varphi},\tilde{\psi}))=0,\quad \upsilon(x(\overline{\varphi},\tilde{\psi}),\ y(\overline{\varphi},\tilde{\psi}))=0,\quad \tilde{\psi}=\{0,Q\}, \tag{4}$$

$$[x(\varphi,\psi)]|_{\partial D_\lambda}=[y(\varphi,\psi)]|_{\partial D_\lambda}=0,$$

$$\left[\frac{\bar{k}}{J}\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2}\cos(\boldsymbol{\upsilon},\mathbf{n})\right]\Bigg|_{\partial D_\lambda}=0,\quad \lambda=1,2,3,\ldots;$$

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\bar{k}\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\bar{k}}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\bar{k}\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\bar{k}}\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)=0, \tag{5}$$

где $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$ — значения квазипотенциала в точках приостановки соответственно расхождения и схождения течений; f_*, f^*, f — функции, определяющие контуры области G_z, а именно L_*, L^*, L соответственно.

С учетом формул перехода [6—8] $J = x_{\varphi} y_{\psi} - x_{\psi} y_{\varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y_{\psi}}{J}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{y_{\varphi}}{J}\frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x_{\psi}}{J}\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{x_{\varphi}}{J}\frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J}\frac{\partial x}{\partial \varphi},$$

условия (3) и формул для вычисления компонент суммарной скорости

$$\upsilon_x = \frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi,\psi)}\frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \upsilon_y = -\frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi,\psi)}\frac{\partial x}{\partial \psi}$$

задачу (2) перепишем в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\upsilon^2}{\sigma \bar{\bar{k}}}\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial \varphi}, \tag{6}$$

$$s(x(\varphi_*,\psi), y(\varphi_*,\psi), t) = s_*,$$

$$s(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi,\psi), y(\varphi,\psi)), \tag{7}$$

где полученное дифференциальное уравнение в частных производных является фактически пространственно одномерным, так как переменная ψ здесь является параметром.

Для записи разностного аналога задачи (3)—(7) осуществим построение сетки в области G_{ω}, узлы (φ_i, ψ_j) которой определяются так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l,\ \Delta\varphi_l = \dfrac{\underline{\varphi} - \varphi_*}{n_1 + 1},\ i = \overline{0, n_1},\ l = 1, \\ \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l,\ \Delta\varphi_l = \dfrac{\overline{\varphi} - \underline{\varphi}}{n_2 - 1},\ i = \overline{n_1 + 1,\ n_1 + n_2},\ l = 2, \\ \overline{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l,\ \Delta\varphi_l = \dfrac{\varphi^* - \overline{\varphi}}{n_3 + 1},\ i = \overline{n_1 + n_2 + 1,\ n},\ l = 3, \\ \psi_j = j\Delta\psi,\ \Delta\psi = Q/m,\ j = \overline{0, m}, \end{cases} \tag{8}$$

где $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; n_1, n_2, n_3, $m \in N$, — параметры разбиения области комплексного квазипотенциала; $\Delta\varphi_l$, $\Delta\psi$ — шаги сетки. На основании общности записи коэффициента проницаемости, являющегося функцией, которая может быть как непрерывной, так и кусочно-непрерывной, например при переходе через границу трещины ГРП, уравнения (5) в середине сеточной области G_ω и на разрезах Γ_*, Γ^* аппроксимируем, используя основные идеи метода конечных объемов [11]. Это позволяет обеспечить выполнение разностного аналога законов сохранения в виде

$$\gamma_l^2(\bar{k}_{i,j+1/2}(x_{i,j+1}-x_{i,j})-\bar{k}_{i,j-1/2}(x_{i,j}-x_{i,j-1}))+\frac{x_{i+1,j}-x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}}-\frac{x_{i,j}-x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}}=0,$$

$$\gamma_l^2(\bar{k}_{i,j+1/2}(y_{i,j+1}-y_{i,j})-\bar{k}_{i,j-1/2}(y_{i,j}-y_{i,j-1}))+\frac{y_{i+1,j}-y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}}-\frac{y_{i,j}-y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}}=0, \quad (9)$$

где

$$\bar{k}_{i,j\pm1/2}=\frac{\bar{k}_{i,j\pm1}+\bar{k}_{i,j}}{2};\ \bar{k}_{i\pm1/2,j}=\frac{\bar{k}_{i\pm1,j}+\bar{k}_{i,j}}{2};$$

$$x_{i,j}=x(\varphi_i,\psi_j);\ y_{i,j}=y(\varphi_i,\psi_j);$$

γ_1 — квазиконформный инвариант, $\gamma_l=\Delta\varphi_l/\Delta\psi$.

Аппроксимируем краевые условия и условия периодичности с дополнительными условиями связи граничных и пограничных узлов [6—8]:

$$f_*(x_{0,j},y_{0,j})=0, f^*(x_{n,j},y_{n,j})=0,\quad j=\overline{0,m},$$

$$f(x_{i,0},y_{i,0})=0, f(x_{i,m},y_{i,m})=0,\quad i=\overline{n_1+1,n_1+n_2},$$

$$x_{i,0}=x_{i,m},\ y_{i,0}=y_{i,m},\quad i=\overline{0,n_1+1}, \quad (10)$$

$$x_{i,0}=x_{i,m},\ y_{i,0}=y_{i,m},\quad i=\overline{n_1+n_2,n};$$

$$(4x_{1,j}-3x_{0,j}-x_{2,j})(x_{0,j+1}-x_{0,j-1})+(4y_{1,j}-3y_{0,j}-y_{2,j})(y_{0,j+1}-y_{0,j-1})=0,$$

$$(3x_{n,j}+x_{n-2,j}-4x_{n-1,j})(x_{n,j+1}-x_{n,j-1})+$$

$$+(3y_{n,j}+y_{n-2,j}-4y_{n-1,j})(y_{n,j+1}-y_{n,j-1})=0,\ j=\overline{0,m-1}, \quad (11)$$

$$(4x_{i,1}-3x_{i,0}-x_{i,2})(x_{i+1,0}-x_{i-1,0})+(4y_{i,1}-3y_{i,0}-y_{i,2})(y_{i+1,0}-y_{i-1,0})=0,$$

$$(3x_{i,m}+x_{i,m-2}-4x_{i,m-1})(x_{i+1,m}-x_{i-1,m})+$$

$$+(3y_{i,m}+y_{i,m-2}-4y_{i,m-1})(y_{i+1,m}-y_{i-1,m})=0,\ i=\overline{n_1+1,n_1+n_2}.$$

Неизвестный полный расход Q и значения квазипотенциалов $\underline{\varphi}$ и $\overline{\varphi}$ в точках приостановки течения находим в процессе итерационного расчета по формулам:

$$Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \widetilde{\alpha}\,\varphi^*}{1+\widetilde{\alpha}}, \quad \overline{\varphi} = \frac{\varphi^* + \widetilde{\beta}\varphi_*}{1+\widetilde{\beta}},$$

где

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1+1)+\gamma_2(n_2-1)+\gamma_3(n_3+1)}; \quad \widetilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1+1)}{\gamma_2(n_2-1)+\gamma_3(n_3+1)};$$

$$\widetilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3+1)}{\gamma_2(n_2-1)+\gamma_1(n_1+1)}.$$

Величины квазиконформных инвариантов получаем на основании «квазиконформного сходства в малом» [10] соответствующих элементарных четырехугольников двух областей:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1+1)}\sum_{i,\,j=0}^{n_1,\,m-1}\gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2-1)}\sum_{i,\,j=n_1+1,\,0}^{n_1+n_2-1,\,m-1}\gamma_{i,j},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n-n_1-n_2)}\sum_{i,\,j=n_1+n_2,\,0}^{n-1,\,m-1}\gamma_{i,j}, \tag{12}$$

где

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2+(y_{i+1,j}-y_{i,j})^2}+\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2+(y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{k_{i+1/2,\,j+1/2}\left(\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2+(y_{i,j+1}-y_{i,j})^2}+\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2+(y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}\right)}.$$

Уравнение (6) аппроксимируем согласно разностной схеме «против потока» [2, 8]:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau\,\upsilon_{i,j}^2}{\sigma\,\bar{k}_{i,j}\Delta\varphi_l} f'\left(\frac{s_{i-1,j}+s_{i,j}}{2}\right)(s_{i,j}-s_{i-1,j}). \tag{13}$$

Здесь τ — временной шаг; $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ — насыщенность соответственно в моменты времени t и $t+\tau$; $\upsilon_{i,j}$ — скорость потока [6], где $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,n_1}$ при $l=1$; $i=\overline{n_1+1,\,n_1+n_2}$ при $l=2$; $i=\overline{n_1+n_2+1,\,n-1}$ при $l=3$. Граничные и начальные условия насыщенности в сеточной области имеют вид $s_{0,j}=s_*$, $s(x_{i,j},y_{i,j},0)=\widetilde{s}(x_{i,j},y_{i,j})$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

Алгоритм приближения решения обратной дифференциальной задачи (3) — (7) к решению разностной задачи в общем случае [4—8] построим с помощью поэтапной параметризации величины γ_l, граничных и внутренних узлов сетки с использованием блочной итерации [10], в частности, для аналитического обоснования его сходимости. На первом шаге алгоритма задаем геометрическую конфигурацию пласта G_z, шаг по времени τ, параметры разбиения n_1, n_2, n_3, m области G_ω и точности $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ работы алгоритма, начальные приближения координат граничных узлов (с учетом условия (10)) и начальные приближения координат внутренних узлов. По формулам (12) находим приближения величин $\gamma_l^{(0)}$ и значения $\underline{\varphi}^{(0)}, \overline{\varphi}^{(0)}, Q^{(0)}$.

Далее уточняем координаты внутренних узлов гидродинамической сетки $(x_{i,j}, y_{i,j})$, решая (9) относительно $x_{i,j}$ и $y_{i,j}$. Для ускорения скорости сходимости всего процесса и экономии машинного времени используем только первый итерационный шаг, учитывая при этом периодичность искомых функций. После этого корректируем предельные узлы при фиксации окружающих граничных и приграничных условий, используя разностные аналоги условий типа Коши—Римана (11). Находим значение квазиконформных инвариантов (12) и уточняем значения величин Q, $\underline{\varphi}, \overline{\varphi}$.

Условиями завершения алгоритма построения гидродинамической сетки, т.е. отыскания неизвестных фильтрационных параметров, в частности поля скорости, на данном итерационном этапе являются стабилизация предельных узлов, так как

$$\max_{i,j}\sqrt{(x_{i,j}^{(k)}-x_{i,j}^{(k-1)})^2+(y_{i,j}^{(k)}-y_{i,j}^{(k-1)})^2}<\varepsilon_1,$$

стабилизация расхода, так как $\left|Q^{(k+1)}-Q^{(k)}\right|<\varepsilon_2$ и др. Используя параметры поля скоростей и поля насыщенности из предыдущего итерационного шага (с учетом граничного условия) согласно (13) находим новое распределение насыщенности в пласте и повторяем шаги алгоритма.

Проведены числовые расчеты процесса вытеснения (согласно модели Баклея—Леверетта [6—8]) (рис. 2, *а*, см. вклейку) при

$$x_*(t)=0{,}1\cos(t)-1,\ y_*(t)=0{,}1\sin(t),\ x^*(t)=0{,}1\cos(t)+1,\ y^*(t)=0{,}1\sin(t),$$

$$x_0(t)=2(\cos(t)+0{,}1\cos(3t)),\ y_0(t)=2(\sin(t)-0{,}1\sin(5t)),\ 0\le t\le 2\pi;$$

$$\varphi_*=0,\ \varphi^*=1,\ \sigma=0{,}5,\ \mu_1=2,\ \mu_2=1;\ \tau=0{,}0001;\ \widetilde{k}_1=(1-s)^2,\ \widetilde{k}_2=s^2;$$

$$s_*=1,\ \widetilde{s}(x,y)=0;\ k_1=10,\ k_*=1;\ D_1=\left\{(x,y):\left(\frac{x-1}{0{,}7}\right)^2+\left(\frac{y}{0{,}05}\right)^2\le 1\right\};$$

$$n_1\times n_2\times n_3\times m=2\times 40\times 2\times 70;\ \varepsilon_1=\varepsilon_2=10^{-5}.$$

На основе полученных результатов установлено, что скорость продвижения фронта вытеснения с приближением к трещине ГРП уменьшается. Это объясняется, прежде всего, различными значениями коэффициента проницаемости в пласте и трещине. При перетекании через границу сред различной проницаемости вытесняющей жидкости необходимо преодолеть сопротивление внутренних сил — так называемый капиллярный эффект. Влияние внутренних сил на суммарный расход $Q = Q(t)$ представлено в виде кривой на рис. 2, *б* (см. вклейку) где, в частности, видно наличие «ступеньчатого» эффекта его изменения на промежутке времени [1,23 ... 1,41], т.е. от начала прорыва жидкости в трещину ГРП до момента достижения критического значения насыщенности.

На рис. 3 (см. вклейку) представлено распределение насыщенности в областях G_{ω} и G_z в некоторый момент времени $t = 0{,}32$ и в момент проникновения вытесняющего агента в трещину гидравлического разрыва $t = 1{,}23$.

Выводы

Разработанный подход позволяет автоматизировать построение гидродинамической сетки в условиях гидроразрыва, предусмотреть характеристики пластовой системы при специальных условиях воздействия на нее, оптимизировать фильтрационные параметры при выборе размещения нагнетательных и эксплуатационных скважин, в частности установить положение точек приостановки течения, в окрестности которых возникают зоны малых скоростей.

The method of complex analysis developed by the authors has been for the case of research of behaviour of the «hole-crack-layer» system elements with allowance for saturation changes during diphasic filtration in a homogeneous horizontal layer in the case of intensification of the influx of stratal liquid to the mining hole as a result of flow disturbance by hydraulic fractures of the layer.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дейк Л.П.* Практический инжиниринг резервуаров. — Москва—Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». — 2008.— 668 с.
2. *Каневская Р.Д.* Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта.— М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 1999. — 212 с.
3. *Иванов С.И.* Интенсификация притока нефти и газа к скважинам. — М. : ООО «Недра-Бизнесцентр». — 2006. — 565 с.
4. *Бомба А.Я., Сінчук А.М., Ярощак С.В.* Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. — 2011. — № 3 (40). — С. 32—36.

5. *Бомба А.Я., Сінчук А.М., Ярощак С.В.* Комплексне дослідження поведінки системи свердловини—тріщини при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті// Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. Вип. 6. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т, 2012. — С. 11—26.
6. *Бомба А.Я., Ярощак С.В.* Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації // Доп. НАН України. — 2010. — № 10 — С. 34—40.
7. *Бомба А.Я., Ярощак С.В.* Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації // Журнал обчислювальної та прикладної математики. — 2010. — № 2. — С. 3—13.
8. *Bomba A. Ya., Yaroschak S.V.* Complex approach to modeling of two-phase filtration processes under control conditions // J. of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 184, No. 1. — P. 56—69.
9. *Басниев К.С., Дмитриев Н.М., Розенберг Г.Д.* Нефтегазовая гидромеханика. — Москва—Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2005. — 544 с.
10. *Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В.* Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. — Київ : Наук. думка, 2007. — 308 с.
11. *Versteeg H.K., Malalasekera W.* An introduction to computational fluid dynamics. The finite volume method. // NY: Longman Scientific & Technical, 1995. — 267 p.

Поступила 24.01.13

БОМБА Андрей Ярославович, д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры информатики и прикладной математики Ривнэнского государственного гуманитарного университета. В 1972 г. окончил Львовский госуниверситет. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные методы.

СИНЧУК Алеся Михайловна, аспирант кафедры информатики и прикладной математики Ривнэнского государственного гуманитарного университета, который окончила в 2009 г. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные методы.

ЯРОЩАК Сергей Викторович, канд. техн. наук, преподаватель кафедры информатики и прикладной математики Ривнэнского государственного гуманитарного университета, который окончил в 2008 г. Область научных исследований — математическое моделирование и вычислительные методы.