И.Ю.Хома

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ НЕТОНКИХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН, ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПО ТОЛЩИНЕ

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: Reolog@imech

Abstract. A method of constructing the general analytical solution of equations of statical electroelasticity of non-thin transversally isotropic plates is stated. The boundary planes of plates are covered by electric charges. The constructing is based on expanding the unknown functions by Fourier series in Legendre polynomials of the thickness coordinate.

Key words: transversally isotropic plate, statical electroelasticity, electric charge, general analytical solution, Fourier series in Legendre polynomials.

Введение.

Редукция трехмерных задач электроупругости к двумерным осуществляется разными методами. Наиболее развитыми являются: метод гипотез [14 – 16], асимптотический [21]; разложения решения по толщине [10, 11, 17]; однородных решений [1, 2] и др. Методом асимптотического интегрирования уравнений пьезоэлектроупругости, описывающих анизотропную и слоистою среды, в [9, 19] получены решения задач о напряженном состоянии слоистых пластин. В работе [7] с использованием разложений искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра построены уравнения равновесия нетонких анизотропных термопьезокерамических оболочек и соответствующие им граничные условия. Решения краевых задач о напряженном состоянии трансверсально-изотропных пьезокерамических пластин с неэлектродированными плоскими гранями изложены в [5, 6]. В [3] проведено исследование двумерного напряженно-деформированного состояния анизотропных пьезоэлектрических пластин с полостями и плоскими трещинами. Обзор имеющихся исследований по отдельным направлениям изложен в [8, 18, 22].

В данной работе на основе [7] изложен способ построения общего аналитического решения уравнений равновесия нетонких электроупругих трансверсально-изотропных пластин, лицевые граничные плоскости которых электродированы и к ним подведены электрические заряды.

§1. Некоторые исходные соотношения теории электроупругости.

Пусть анизотропная пластина из пьезоэлектрического монокристалла, занимающая область $\Omega = S\times[-h,h]$ трехмерного пространства R^3, отнесена к декартовой системе координат x_i $(i=1,2,3)$. Принято, что x_1, x_2 принадлежат срединной плоскости S, а координата x_3 изменяется на отрезке $[-h, h]$, где h – полутолщина пластины. Граничные плоскости $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ электродированы и к ним подведены электрические заряды интенсивности Φ^+ и Φ^- (для простоты примем их постоянными). Кроме того, на лицевых граничных плоскостях могут быть заданы нормальные поперечные напряжения σ_{33}^+ и σ_{33}^-.

Для анизотропного пьезоэлектрического тела уравнения состояния имеют вид [4]

$$\sigma_{ij} = c_{ijlm}\gamma_{lm} - e_{lij}E_l\,; \quad D_j = e_{jlm}\gamma_{lm} + \varepsilon_{jl}E_l\,, \tag{1.1}$$

где σ_{ij} и γ_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций; D_j и E_j – составляющие векторов электрической индукции и напряженности электрического поля; c_{ijlm} – модули упругости (при постоянных E_i); e_{lij} – пьезомодули; ε_{jl} – диэлектрические проницаемости (при постоянных γ_{ij}). Эти тензорные величины удовлетворяют следующим условиям симметрии: $c_{ijlm} = c_{jilm} = c_{ijml} = c_{mlij}$; $e_{lij} = e_{lji}$; $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ (здесь и ниже по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование, причем латинские буквы принимают значения 1, 2, 3, а греческие – 1, 2).

Градиентные уравнения определяются формулами

$$2\gamma_{ij} = \partial_i u_j + \partial_j u_i\,; \quad E_j = -\partial_j \Phi\,, \tag{1.2}$$

где $\partial_j = \partial / \partial x_j$; u_j – компоненты вектора перемещений; Φ – диэлектрический потенциал. Представим [7] перемещения u_j и потенциал Φ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\varsigma)$

$$u_j(x_1,x_2,x_3) = \sum_{k=0}^{N} u_j^{(k)}(x)P_k(\varsigma)\,;$$

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = \sum_{k=0}^{N} \Phi^{(k)}(x)\left[P_k(\varsigma) - P_{k+2}(\varsigma)\right] + \tag{1.3}$$

$$+\frac{1}{2}\left[\Phi^+ - (-1)^N \Phi^-\right]P_{N+1}(\varsigma) + \frac{1}{2}\left[\Phi^+ + (-1)^N \Phi^-\right]P_{N+2}(\varsigma)\,,$$

где $x = (x_1, x_2)$; $\varsigma = h^{-1}x_3$; $u_j^{(k)}(x)$; $\Phi^{(k)}(x)$ – коэффициенты, определяемые равенствами

$$\left\{u_j^{(k)}(x), \Phi^{(k)}(x)\right\} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left\{u_j(x_1,x_2,x_3), \Phi(x_1,x_2,x_3)\right\}P_k(\varsigma)\,;$$

N – натуральное число, которое примем четным; $N = 2n$ $(n = 0, 1, \ldots, <\infty)$. Очевидно, на граничных плоскостях $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ потенциал Φ принимает заданные значения Φ^+ и Φ^-.

Принимая во внимание рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра, из (1.2) получим выражения для напряженностей электрического поля

$$E_\alpha = -\sum_{k=0}^{N}\partial_\alpha\left(\Phi^{(k)} - \Phi^{(k-2)}\right)P_k(\varsigma) \qquad (\alpha = 1, 2)\,;$$

$$E_3 = \frac{1}{h}\sum_{k=0}^{N}(2k+1)\Phi^{(k-1)}P_k(\varsigma) - \tag{1.4}$$

$$-\frac{1}{2h}\left\{\left[\Phi^+ - (-1)^N\Phi^-\right]P'_{N+1}(\varsigma) + \left[\Phi^+ + (-1)^N\Phi^-\right]P'_{N+2}(\varsigma)\right\}.$$

Для производных полиномов Лежандра P'_{N+1} и P'_{N+2} при $N = 2n$ имеем формулы

$$P'_{2n+1}(\varsigma) = \sum_{s=0}^{n}(4s+1)P_{2s}(\varsigma)\,; \quad P'_{2n+2}(\varsigma) = \sum_{s=0}^{n}(4s+3)P_{2s+1}(\varsigma)\,. \tag{1.5}$$

Аналогичным способом определяем компоненты деформаций γ_{ij}, т.е.

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon_{ij}^{(k)}(x)\, P_k(\varsigma) \tag{1.6}$$

$$\left(\varepsilon_{\alpha j}^{(k)} = \partial_\alpha u_j^{(k)} \quad (\alpha = 1,\, 2)\,; \quad \varepsilon_{3j}^{(k)} = h^{-1} u_j'^{(k)} \ (j = 1,\, 2,\, 3)\,; \quad u_j'^{(2k)} = (4k+1)\sum_{s=k+1}^{n} u_j^{(2s-1)}\,; \right.$$

$$\left. u_j'^{(2k-1)} = (4k-1)\sum_{s=k}^{n} u_j^{(2s)} \right).$$

Согласно (1.4), (1.6) уравнения состояния (1.1) примут вид

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=0}^{N} \left[c_{ijlm}\varepsilon_{lm}^{(s)} + e_{\alpha ij}\partial_\alpha \left(\Phi^{(s)} - \Phi^{(s-2)} \right) - (2s+1) e_{3ij} h^{-1} \Phi^{(s-1)} \right] P_s(\varsigma) +$$

$$+ \frac{e_{3ij}}{2h} \left\{ \left[\Phi^+ - (-1)^N \Phi^- \right] P'_{N+1}(\varsigma) + \left[\Phi^+ + (-1)^N \Phi^- \right] P'_{N+2}(\varsigma) \right\}; \tag{1.7}$$

$$D_j = \sum_{s=0}^{N} \left[e_{jlm}\varepsilon_{lm}^{(s)} - \varepsilon_{j\alpha}\partial_\alpha \left(\Phi^{(s)} - \Phi^{(s-2)} \right) + (2s+1) \varepsilon_{j3} h^{-1} \Phi^{(s-1)} \right] P_s(\varsigma) -$$

$$- \frac{\varepsilon_{j3}}{2h} \left\{ \left[\Phi^+ - (-1)^N \Phi^- \right] P'_{N+1}(\varsigma) + \left[\Phi^+ + (-1)^N \Phi^- \right] P'_{N+2}(\varsigma) \right\}.$$

Если умножить (1.7) на $\left(m + \frac{1}{2} \right) P_m(\varsigma)$ и провести интегрирование по x_3 в пределах толщины пластины, то получим с учетом равенств (1.5) соотношения

$$\sigma_{ij}^{(2k)} = h \left\{ c_{ijlm}\varepsilon_{lm}^{(2k)} + e_{\alpha ij}\partial_\alpha \left(\Phi^{(2k)} - \Phi^{(2k-2)} \right) - (4k+1) e_{3ij} h^{-1} \left[\Phi^{(2k-1)} - \frac{1}{2}\left(\Phi^+ - \Phi^- \right) \right] \right\};$$

$$D_j^{(2k)} = h \left\{ e_{jlm}\varepsilon_{lm}^{(2k)} - \varepsilon_{j\alpha}\partial_\alpha \left(\Phi^{(2k)} - \Phi^{(2k-2)} \right) + (4k+1) \varepsilon_{j3} h^{-1} \left[\Phi^{(2k-1)} - \frac{1}{2}\left(\Phi^+ - \Phi^- \right) \right] \right\} \tag{1.8}$$

$(k = 0,\, 1, \ldots,\, n)$ при $m = 2k$ и

$$\sigma_{ij}^{(2k-1)} = h \left\{ c_{ijlm}\varepsilon_{lm}^{(2k-1)} + e_{\alpha ij}\partial_\alpha \left(\Phi^{(2k-1)} - \Phi^{(2k-3)} \right) - (4k-1)\, e_{3ij} h^{-1} \left[\Phi^{(2k-2)} - \frac{1}{2}\left(\Phi^+ + \Phi^- \right) \right] \right\};$$

$$D_j^{(2k-1)} = h \left\{ e_{jlm}\varepsilon_{lm}^{(2k-1)} - \varepsilon_{j\alpha}\partial_\alpha \left(\Phi^{(2k-1)} - \Phi^{(2k-3)} \right) + (4k-1) \varepsilon_{j3} h^{-1} \left[\Phi^{(2k-2)} - \frac{1}{2}\left(\Phi^+ + \Phi^- \right) \right] \right\} \tag{1.9}$$

$(k = 1,\, 2, \ldots,\, n)$ при $m = 2k - 1$.

Из равенств (1.7) находим сумму и разность электрической индукции D_3 на лицевых $x_3 = h$, $x_3 = -h$ граничных плоскостях пластины, т.е.

$$D_3^+ + D_3^- = 2\sum_{k=0}^{n} \left\{ e_{3lm}\, \varepsilon_{lm}^{(2k)} - \varepsilon_{3\alpha}\partial_\alpha (\Phi^{(2k)} - \Phi^{(2k-2)}) + (4k+1)\, \varepsilon_{33} h^{-1} \left[\Phi^{(2k-1)} - \frac{1}{2}(\Phi^+ - \Phi^-) \right] \right\};$$

$$D_3^+ - D_3^- = 2\sum_{k=0}^{n}\left\{ e_{3lm}\,\varepsilon_{lm}^{(2k-1)} - \varepsilon_{3\alpha}\partial_\alpha(\Phi^{(2k+1)} - \Phi^{(2k-1)}) + (4k+3)\,\varepsilon_{33}h^{-1}\left[\Phi^{(2k)} - \frac{1}{2}(\Phi^+ + \Phi^-)\right]\right\}. \quad (1.10)$$

Уравнения равновесия пластины имеют вид [7]

$$\partial_\alpha\sigma_{\alpha j}^{(k)} - (2k+1)\,h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]}\sigma_{3j}^{(k-2s-1)} + \left(k+\frac{1}{2}\right)[\sigma_{3j}^+ - (-1)^k\,\sigma_{3j}^-] = 0 \quad (j=1,2,3);$$

$$\partial_\alpha D_\alpha^{(k)} - (2k+1)\,h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]}D_3^{(k-2s-1)} + \left(k+\frac{1}{2}\right)[D_3^+ - (-1)^k\,D_3^-] = 0 \quad (k=0,1,\ldots,N), \quad (1.11)$$

где $K = (k-1)/2$; символ $[K]$ обозначает целую часть числа K; σ_{3j}^+, σ_{3j}^- $(j=1,\,2,\,3)$ и D_3^+, D_3^- – значения напряжений и электрической индукции на лицевых граничных плоскостях.

Уравнения (1.11) совместно с (1.8), (1.9) составляют замкнутую систему для определения всех неизвестных функций. Для трансверсально-изотропного тела данные уравнения распадаются на две независимые группы уравнений, описывающие, соответственно, симметричное и кососимметричное (по отношению к срединной плоскости S) деформирования пластины.

Ниже рассмотрим данные уравнения и изложим метод представления их общих аналитических решений.

§2. Симметричное деформирование пластины.

Вводя в рассмотрение комплексные переменные $z = x_1 + i\,x_2$, $\bar{z} = x_1 - i\,x_2$ и связанные с ними дифференциальные операторы $\partial_z = \partial/\partial z$, $\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial\bar{z}$, запишем уравнения равновесия (1.11) в виде

$$\partial_z(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)}) + \partial_{\bar{z}}(\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}) - (4k+1)\,h^{-1}\sum_{s=1}^{k}\sigma_+^{(2s-1)} = 0 \ (k=0,1,\ldots,n);$$

$$\partial_z\sigma_+^{(2k-1)} + \partial_{\bar{z}}\bar{\sigma}_+^{(2k-1)} - (4k-1)\,h^{-1}\sum_{s=0}^{k-1}\sigma_{33}^{(2s)} + \left(2k-\frac{1}{2}\right)(\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-) = 0; \quad (2.1)$$

$$\partial_z D_+^{(2k-1)} + \partial_{\bar{z}}\bar{D}_+^{(2k-1)} - (4k-1)\,h^{-1}\sum_{s=0}^{k-1}D_3^{(2s)} + \left(2k-\frac{1}{2}\right)(D_3^+ + D_3^-) = 0 \ (k=1,\,2,\ldots,\,n),$$

а соотношения электроупругости (1.8), (1.9) представим таким образом:

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4c_{66}h\partial_{\bar{z}}u_+^{(2k)};$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2h\left\{(c_{12}+c_{66})e^{(2k)} + (4k+1)c_{13}h^{-1}\sum_{s=k+1}^{n}u_3^{(2s-1)} - (4k+1)\,e_{31}h^{-1}\left[\Phi^{(2k-1)} - \frac{1}{2}(\Phi^+ - \Phi^-)\right]\right\};$$

$$\sigma_{33}^{(2k)} = h\left\{c_{13}e^{(2k)} + (4k+1)c_{33}h^{-1}\sum_{s=k+1}^{n}u_3^{(2s-1)} - (4k+1)\,e_{33}h^{-1}\left[\Phi^{(2k-1)} - \frac{1}{2}(\Phi^+ - \Phi^-)\right]\right\};$$

$$\sigma_+^{(2k-1)} = h\left\{c_{44}\left[2\partial_{\bar{z}}u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1}\sum_{s=k}^{n}u_+^{(2s)}\right] + 2e_{15}\partial_{\bar{z}}(\Phi^{(2k-1)} - \Phi^{(2k-3)})\right\}; \quad (2.2)$$

$$D_+^{(2k-1)} = h\left\{e_{15}\left[2\partial_{\bar{z}}u_3^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1}\sum_{s=k}^{n}u_+^{(2s)}\right] - 2\varepsilon_{11}\partial_{\bar{z}}(\Phi^{(2k-1)} - \Phi^{(2k-3)})\right\};$$

$$D_3^{(2k)} = h\left\{e_{31}e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}\sum_{s=k+1}^{n} u_3^{(2s-1)} + (4k+1)\,\varepsilon_{33}h^{-1}\left[\Phi^{(2k-1)} - \frac{1}{2}(\Phi^+ - \Phi^-)\right]\right\}$$

$$\left(u_+^{(m)} = u_1^{(m)} + i\,u_2^{(m)}\ ;\ \sigma_+^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} + i\,\sigma_{23}^{(m)}\ ;\ D_+^{(m)} = D_1^{(m)} + i\,D_2^{(m)}\ ;\ e^{(m)} = \partial_z u_+^{(m)} + \partial_{\bar z}\,u_+^{(m)}\right). \tag{2.3}$$

Кроме того, в (2.2) использованы известные [4] двухиндексные обозначения для упругих постоянных: $c_{11} = c_{1111}$; $c_{12} = c_{1122} = c_{2211}$; $c_{13} = c_{1133} = c_{3311}$; $c_{33} = c_{3333}$; $c_{44} = c_{1313} = c_{2323}$; $c_{66} = c_{1212} = c_{2121}$ и пьезомодулей : $e_{15} = e_{113} = e_{223}$; $e_{31} = e_{311} = e_{322}$; $e_{33} = e_{333}$.

Подставляя выражения (2.2) в равенства (2.1) и учитывая (1.10), получаем систему уравнений

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_{\bar z}e^{(2k)} + (4k+1)\,h^{-1}\Big[-2(e_{15} + e_{31})\partial_{\bar z}\Phi^{(2k-1)} +$$

$$+2\sum_{s=1}^{n}\lambda_{2s-1}^{(k)}\partial_{\bar z}u_3^{(2s-1)} - c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}u_+^{(2s)}\Big] = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)\ ; \tag{2.4}$$

$$c_{44}\Delta \underline{u}_3^{(2k-1)} + (4k-1)\,h^{-1}\left\{\sum_{s=0}^{n}\tilde\lambda_{2s}^{(k)}e^{(2s)} - c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s-1}^{(k)}u_3^{(2s-1)} +\right.$$

$$\left.+e_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(4s+1)[\Phi^{(2s-1)} - \tfrac{1}{2}(\Phi^+ - \Phi^-)] + \tfrac{1}{2}(\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-)\right\} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)\ ; \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_{11}\Delta\,\underline{\Phi}^{(2k-1)} + (4k-1)\,h^{-1}\left\{(e_{15} + e_{31})\sum_{s=k}^{n}e^{(2s)} + e_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(s-k)(2s+2k-1)u_3^{(2s-1)} +\right.$$

$$\left.+\varepsilon_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(4s+1)[\Phi^{(2s-1)} - \tfrac{1}{2}(\Phi^+ - \Phi^-)]\right\} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n)\,, \tag{2.6}$$

в которой $\Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}$ – оператор Лапласа;

$$\underline{u}_3^{(m)} = u_3^{(m)} + \frac{e_{15}}{c_{44}}(\Phi^{(m)} - \Phi^{(m-2)})\ ;\ \underline{\Phi}^{(m)} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}u_3^{(m)} - (\Phi^{(m)} - \Phi^{(m-2)})\ ;$$

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \le s \le k\,; \\ c_{13}, & k < s \le n\,; \end{cases} \quad \tilde\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 1 \le s \le k\,; \\ c_{44}, & k < s \le n; \end{cases}$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}$ и $\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \le s \le k\,; \\ k(2k-1), & k \le s \le n; \end{cases} \qquad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \le s \le k\,; \\ k(2k+1), & k \le s \le n\,. \end{cases}$$

Заметим, что функции, заданные на лицевых граничных плоскостях пластины, составляют правую часть рассматриваемой системы. Предположим, что механические напряжения $\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = 0$, а $\Phi^+ = -\Phi^- = \Phi_0$ ($\Phi_0 = \mathrm{const}$). Тогда частное решение системы (2.4) – (2.6) представим в виде

$$c_{66}\hat u_3^{(2k-1)} = \gamma_3^{(2k-1)}\Phi_0\ ; \quad \hat\Phi^{(2k-1)} = \tilde\gamma_3^{(2k-1)}\Phi_0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\ ;$$

$$\hat u_+^{(2k)} = 0\ ; \quad \hat e^{(2k)} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)\,, \tag{2.7}$$

где $\gamma_3^{(2k-1)}$, $\tilde\gamma_3^{(2k-1)}$ – постоянные, определяемые из решения алгебраической системы

$$\frac{c_{33}}{e_{33}c_{66}}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s-1}^{(k)}\gamma_3^{(2s-1)}-\sum_{s=1}^{k-1}(4s+1)\tilde{\gamma}_3^{(2s-1)}=-k(2k-1)\qquad (k=0,1,\ldots,n)\,;$$

$$\frac{e_{33}}{\varepsilon_{11}c_{66}}\sum_{s=k}^{n}(s-k)\,(2s+2k-1)\gamma_3^{(2s-1)}+\sum_{s=k}^{n}(4s+1)\tilde{\gamma}_3^{(2s-1)}=(n-k-1)(2n+2k+1)\,.$$

Не изменяя обозначений для искомых функций, изложим метод построения общего аналитического решения однородной системы (2.4) – (2.6). Применим к уравнениям (2.4) операцию ∂_z и в полученных равенствах рассмотрим вещественную часть. Учитывая при этом выражения (2.3), будем иметь формулы

$$c_{11}\Delta\, e^{(0)}+c_{13}\,h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\Delta\, u_3^{(2s-1)}=0\ \ (k=0)\,; \tag{2.8}$$

$$c_{11}\Delta\, e^{(2k)}+(4k+1)\,h^{-1}\Bigg[-(e_{15}+e_{31})\Delta\Phi^{(2k-1)}+\sum_{s=1}^{n}\lambda_{2s-1}^{(k)}\Delta u_3^{(2s-1)}-$$

$$-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}e^{(2s)}\Bigg]=0\ \ (k=1,\,2,\ldots,n)\,. \tag{2.9}$$

Из (2.8) следует, что

$$e^{(0)}=-\frac{c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}u_3^{(2s-1)}+\frac{2c}{c_1c_{11}}u\,, \tag{2.10}$$

где u – гармоническая функция; $c=1-c_{13}^2/c_{11}c_{33}$; $c_1=c-c_{66}/c_{11}$; $c_2=c-c_{13}c_{13}\,/c_{11}c_{33}$.

Согласно (2.10) уравнения (2.5) примут вид

$$c_{44}\Delta\, u_3^{(2k-1)}+(4k-1)h^{-1}\Bigg[\sum_{s=1}^{n}\tilde{\lambda}_{2s}^{(k)}e^{(2s)}+e_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{k-1}(4s+1)\Phi^{(2s-1)}-$$

$$-c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}(\tilde{\alpha}_{2s-1}^{(k)}+c)u_3^{(2s-1)}\Bigg]=\frac{2(4k-1)cc_{13}}{c_1c_{11}h}u\quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{2.11}$$

$$\left(\tilde{\alpha}_{2s-1}^{(k)}=\begin{cases}(s-1)\ (2s+1), & 1\le s\le k\,;\\ (k-1)\ (2k+1), & k\le s\le n\,.\end{cases}\right).$$

Равенства (2.9), (2.11) совместно с (2.6) образуют систему уравнений $6n$-го порядка относительно функций $u_3^{(2k-1)}$, $\Phi^{(2k-1)}$, $e^{(2k)}$ $(k=1,\,2,\ldots,\,n)$. Решение ее примем в виде

$$c_{66}u_3^{(1)}=-\kappa_1^*h\,u+u_1\,;\quad c_{66}u_3^{(2k-1)}=u_{3k-2}\quad (k=2,3,\ldots,n)\,;$$

$$\Phi^{(2k-1)}=u_{3k-1}\,;\quad c_{66}h\,e^{(2k)}=u_{3k}\quad (k=1,2,\ldots,n)\,, \tag{2.12}$$

где функции u_k – общее решение однородной системы, которую представим так:

$$\sum_{k=1}^{3n}(\alpha_{pk}-\beta_{pk}h^2\Delta)u_k=0\quad (p=1,2,\ldots,3n)\,. \tag{2.13}$$

Здесь α_{pk} , β_{pk} – постоянные, их явные выражения нетрудно выписать; $\kappa_1^*=2c_{13}c_{66}/c_1c_{11}c_{33}$.

Замечание 1. Можно, следуя [13], определить из (2.11) функции $e^{(2k)}$, т.е.

$$e^{(2k)}=\frac{h}{c^*}\left\{-\frac{1}{4k-1}\Delta\underline{u}_3^{(2k-1)}+\frac{1}{4k+3}\Delta\underline{u}_3^{(2k+1)}+\frac{4k+1}{c_{44}h^2}\left[e_{33}\Phi^{(2k-1)}-c_{33}\sum_{s=k+1}^{n}u_3^{(2s-1)}\right]\right\};$$

$$(k=1,\,2,\ldots,\ n-1)\,;$$

$$e^{(2n)}=\frac{h}{c^*}\left\{-\frac{c_{13}}{3c_{44}}\Delta\underline{u}_3^{(1)}-\frac{1}{4n-1}\Delta\underline{u}_3^{(2k-1)}-\frac{e_{33}}{c_{44}h^2}\sum_{s=1}^{n-1}\Phi^{(2s-1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_{33}}{c_{44}h^2}\sum_{s=1}^{n}(\tilde{\alpha}_{2s-1}^{(k)}+cc^*)+\frac{3cc^*c_{13}}{c_1c_{11}c_{44}h}u\right\},$$

и внести их значения в (2.6) и (2.10). Тогда получим систему уравнений $6n$ -го порядка относительно функций $u_3^{(2k-1)}$ и $\Phi^{(2k-1)}$.

Возвращаясь к системе уравнений (2.13), введем функцию V согласно формулам

$$u_k=A_{pk}(\Delta)V\,, \tag{2.14}$$

в которых $A_{pk}(\Delta)=(-1)^{k+p}M_{pk}(\Delta)$, $M_{pk}(\Delta)$ – миноры; $A_{pk}(\Delta)$ – алгебраические дополнения элементов $L_{pk}(\Delta)=\alpha_{pk}-\beta_{pk}h^2\Delta$ p-той строки операторной матрицы $\left\|L_{pk}(\Delta)\right\|_{3n\times 3n}$, и подставим выражения u_k в p-е равенство системы (2.13). После некоторых преобразований получаем уравнение $\sum\limits_{s=0}^{3n}a_sh^{2s}\Delta^sV=0$ с постоянными коэффициентами a_s, причем $a_0\neq 0$. Раскрывая определители в формулах (2.14), находим функции $u_k=\sum\limits_{s=0}^{3n-1}\tilde{G}_s^{(k)}h^{2s}\Delta^sV$.

Рассмотрим характеристическое уравнение $\det\left\|\alpha_{pk}-k\beta_{pk}\right\|=0$ и предположим, что оно имеет разные, не равные нулю корни k_m $(m=1,2,\ldots,3n)$. Тогда уравнение (2.13) может быть представлено в виде произведения операторов $\prod\limits_{m=1}^{3n}(\Delta-k_mh^{-2})V=0$, откуда следует, что

$$V=\sum_{m=1}^{3n}V_m\,, \tag{2.15}$$

где V_m – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m-k_mh^{-2}V_m=0\,. \tag{2.16}$$

Учитывая (2.15), (2.16), запишем u_k в виде

$$u_k=\sum_{m=1}^{3n}G_m^{(k)}V_m\,, \tag{2.17}$$

где постоянные $G_m^{(k)}$ определяются алгебраическими дополнениями элементов какой-либо строки определителя $\left|\alpha_{pk}-k_m\beta_{pk}\right|_{3n\times 3n}$. Следовательно, имеем $G_m^{(k)}=A_{pk}(k_m)=\sum\limits_{s=0}^{3n-1}\tilde{G}_m^{(k)}k_m^s$.

Примем гармоническую функцию u в виде вещественной части некоторой голоморфной функции $\varphi'(z)$ (штрих обозначает производную по z), т.е.

$$u=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\,, \tag{2.18}$$

и подставим выражения (2.17) и (2.18) в формулы (2.12). Вводя при этом обозначения $c_m^{(2k-1)}=G_m^{(3k-2)}$, $\tilde{c}_m^{(2k-1)}=G_m^{(3k-1)}$, $c_m^{(2k)}=G_m^{(3k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$, имеем

$$c_{66}u_3^{(1)}=-\kappa_1^*h[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]+\sum_{m=1}^{3n}c_m^{(1)}V_m\,;\quad c_{66}u_3^{(2k-1)}=\sum_{m=1}^{3n}c_m^{(2k-1)}V_m\quad(k=2,3,\ldots,n)\,;$$

$$\Phi^{(2k-1)}=\sum_{m=1}^{3n}\tilde{c}_m^{(2k-1)}V_m\,;\quad c_{66}he^{(2k)}=\sum_{m=1}^{3n}c_m^{(2k)}V_m\quad (k=1,\,2,\dots,\,n)\,. \tag{2.19}$$

Учитывая (2.19), из (2.10) определим

$$c_{66}e^{(0)}=\kappa_{\rm e}[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]+h^{-1}\sum_{m=1}^{3n}c_m^{(0)}V_m\quad (\,\kappa_{\rm e}=2c_{66}/c_1c_{11}\,;\;c_{11}c_m^{(0)}=-c_{13}\sum_{s=1}^{n}c_m^{(2s-1)}\,). \tag{2.20}$$

Отсюда, принимая во внимание выражения (2.3), получаем равенства

$$c_{66}(\partial_z u_+^{(0)}+\partial_{\bar z}\bar{u}_+^{(0)})=\kappa_{\rm e}[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}]+2h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(0)}\partial_z(\partial_{\bar z}V_m)\,;$$

$$c_{66}(\partial_z u_+^{(2k)}+\partial_{\bar z}\bar{u}_+^{(2k)})=2h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(2k)}\partial_z(\partial_{\bar z}V_m)\quad (k=1,2,\dots,n)\,,$$

из которых находим

$$c_{66}u_+^{(0)}=\kappa_{\rm e}\varphi(z)+h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(0)}\partial_{\bar z}V_m+ih\partial_{\bar z}Y_0\,;\quad c_{66}u_+^{(2k)}=h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(2k)}\partial_{\bar z}V_m+i\,h\,\partial_{\bar z}Y_{2k}\,, \tag{2.21}$$

где $a_m^{(2k)}=2k_m^{-1}c_m^{(2k)}$; Y_{2k} – произвольные достаточно гладкие вещественные функции.

Их необходимо выбрать такими, чтобы выполнялись равенства (2.4). Следовательно, если внести в (2.4) выражения (2.19) – (2.21), то получим уравнения

$$\partial_{\bar z}\Delta Y_0+c_0\sum_{m=1}^{3n}O_m^{(0)}\partial_{\bar z}V_m=4ih^{-1}\overline{\varphi''(z)}\,;$$

$$\partial_{\bar z}\left[\Delta Y_{2k}-\frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}Y_{2s}\right]+c_0\sum_{m=1}^{3n}O_m^{(2k)}\partial_{\bar z}V_m=\frac{4i(4k+1)c_{13}c_{44}}{c_1c_{11}c_{33}h}\overline{\varphi''(z)}$$

$$(k=1,\,2,\dots,\,n)\,; \tag{2.22}$$

$$O_m^{(2k)}=c_m^{(2k)}+(4k+1)\;c_{11}^{-1}\left[-(e_{15}+e_{31})c_{66}\tilde{c}_m^{(2k-1)}+\sum_{s=1}^{n}(\lambda_{2s-1}^{(k)}c_m^{(2s-1)}-c_{44}\beta_{2s}^{(k)}k_m^{-1}c_m^{(2s)})\right].$$

Заметим, что аналогичная подстановка полученного решения в уравнения (2.8), (2.9) приводит к выполнению тождества $\sum_{m=1}^{3n}O_m^{(2k)}\Delta V_m=0$. Поскольку метагармонические функции V_m линейно независимые, то отсюда следует, что $O_m^{(2k)}\equiv 0\quad \forall k\in[0,\,n]$. Учитывая вышеизложенное, из первого равенства (2.22) определим

$$Y_0=ih^{-1}[z\overline{\varphi(z)}-\bar z\varphi(z)+\overline{\psi_*(z)}-\psi_*(z)]\,, \tag{2.23}$$

где $\psi_*(z)$ – произвольная голоморфная функция, а второе равенство после интегрирования по переменной $\bar z$ запишем таким образом:

$$\Delta Y_{2k}-\frac{(4k+1)}{c_{66}h^2}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}Y_{2s}=\frac{4i(4k+1)c_{13}c_{44}}{c_1c_{11}c_{33}h}[\varphi'(z)-\overline{\varphi'(z)}]\quad (k=1,\,2,\dots,n)\,. \tag{2.24}$$

Примем

$$Y_2=-i\kappa_2^*h[\overline{\varphi'(z)}-\varphi'(z)]+y_1\,;\quad Y_{2k}=y_k\quad (k=2,3,\dots,n)\,, \tag{2.25}$$

где функции y_k – общее решение однородной системы (2.24), которую запишем в виде

$$\sum_{l=1}^{n}(q_{kl}-\delta_{kl}h^2\Delta)y_l=0 \quad (k=1,\,2,\ldots,\,n)\,. \tag{2.26}$$

Здесь $\kappa_2^*=4c_{13}c_{66}/3c_1c_{11}c_{33}$; δ_{kl} – символ Кронекера; $q_{kl}=(4k+1)\beta_{2l}^{(k)}\,c_{44}/c_{66}$.

Предполагая, что характеристическое уравнение $\det\|q_{kl}-\lambda\delta_{kl}\|=0$ имеет n разных корней λ_1, λ_2, $\ldots,\lambda_n$, из (2.26) аналогичным выше способом получим

$$y_k=\sum_{s=1}^{n}b_s^{(2k)}\omega_s\,, \tag{2.27}$$

где ω_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам $\Delta\omega_s-\lambda_s h^{-2}\omega_s=0$, а $b_s^{(2k)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов какой-либо строки определителя $\left|\,q_{kl}-\lambda_s\delta_{kl}\right|_{n\times n}$.

Согласно равенствам (2.23), (2.27) выражения (2.21) примут вид

$$c_{66}u_+^{(0)}=\kappa^*\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}+h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(0)}\partial_{\bar z}V_m\ ;$$

$$c_{66}u_+^{(2)}=\kappa_2^*h^2\overline{\varphi''(z)}+h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(2)}\partial_{\bar z}V_m+ih\sum_{s=1}^{n}b_s^{(2)}\partial_{\bar z}\omega_s\,; \tag{2.28}$$

$$c_{66}u_+^{(2k)}=h\sum_{m=1}^{3n}a_m^{(2k)}\partial_{\bar z}V_m+ih\sum_{s=1}^{n}b_s^{(2k)}\partial_{\bar z}\omega_s\,,\quad k=2,3,\ldots,\,n;\quad (\overline{\psi(z)}=\overline{\psi_*'(z)}\,;\kappa^*=1+\kappa_{\text{e}}\,).$$

Таким образом, функции (2.7), (2.19), (2.20) и (2.28) составляют общее аналитическое решение системы уравнений (2.4) – (2.6).

§3. Кососимметричное деформирование пластины.

При кососимметричном деформировании пластины уравнения равновесия (1.11) в комплексной форме имеют такой вид:

$$\partial_z(\sigma_{11}^{(2k-1)}-\sigma_{22}^{(2k-1)}+2i\sigma_{12}^{(2k-1)})+\partial_{\bar z}(\sigma_{11}^{(2k-1)}+\sigma_{22}^{(2k-1)})-(4k-1)h^{-1}\sum_{s=0}^{k-1}\sigma_+^{(2s)}=0$$
$$(k=1,\,2,\ldots,n)\,;$$

$$\partial_z\sigma_+^{(2k)}+\partial_{\bar z}\overline{\sigma}_+^{(2k)}-(4k+1)h^{-1}\sum_{s=1}^{k}\sigma_{33}^{(2s-1)}+\left(2k+\frac{1}{2}\right)(\sigma_{33}^+-\sigma_{33}^-)=0\quad (k=0,1,\ldots,n)\,; \tag{3.1}$$

$$\partial_z D_+^{(2k)}+\partial_{\bar z}\overline{D}_+^{(2k)}-(4k+1)h^{-1}\sum_{s=1}^{k}D_3^{(2s-1)}+\left(2k+\frac{1}{2}\right)(D_3^+-D_3^-)=0\quad (k=0,1,\ldots,n)\,,$$

а для соотношений электроупругости (1.8), (1.9) имеем равенства

$$\sigma_{11}^{(2k-1)}-\sigma_{22}^{(2k-1)}+2i\sigma_{12}^{(2k-1)}=4c_{66}h\,\partial_{\bar z}u_+^{(2k-1)}\,;$$

$$\sigma_{11}^{(2k-1)}+\sigma_{22}^{(2k-1)}=2h\left\{(c_{12}+c_{66})e^{(2k-1)}+(4k-1)h^{-1}\sum_{s=k}^{n}u_3^{(2s)}-(4k-1)e_{31}h^{-1}\left[\Phi^{(2k-2)}-\frac{1}{2}(\Phi^++\Phi^-)\right]\right\};$$

$$\sigma_{33}^{(2k-1)}=h\left\{c_{13}e^{(2k-1)}+(4k-1)c_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}u_3^{(2s)}-(4k-1)e_{33}h^{-1}\left[\Phi^{2k-2}-\frac{1}{2}(\Phi^++\Phi^-)\right]\right\};$$

$$\sigma_+^{(2k)}=h\left\{c_{44}\left[2\partial_{\bar z}u_3^{(2k)}+(4k+1)h^{-1}\sum_{s=k+1}^{n}u_+^{(2s-1)}\right]+2e_{15}\partial_{\bar z}(\Phi^{(2k)}+\Phi^{(2k-2)})\right\};\tag{3.2}$$

$$D_{+}^{(2k)} = h\left\{e_{15}\left[2\partial_{\bar z}u_3^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}\sum_{s=k+1}^{n}u_{+}^{(2s-1)}\right] - 2\varepsilon_{11}\partial_{\bar z}(\Phi^{(2k)} + \Phi^{(2k-2)})\right\};$$

$$D_3^{(2k-1)} = h\left\{e_{31}e^{(2k-1)} + (4k-1)e_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}u_3^{(2s)} + (4k-1)\varepsilon_{33}h^{-1}\left[\Phi^{(2k-2)} - \frac{1}{2}(\Phi^{+} + \Phi^{-})\right]\right\}.$$

После внесения выражений (3.2) в равенства (3.1), получаем систему уравнений

$$c_{66}\Delta u_{+}^{(2k-1)} + 2(c_{12}+c_{66})\partial_{\bar z}e^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1}\left[-2(e_{15}+e_{31})\partial_{\bar z}\Phi^{(2k-2)} + \right.$$

$$\left. +2\sum_{s=0}^{n}\lambda_{2s}^{(k)}\partial_{\bar z}u_3^{(2s)} - c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s-1}^{(k)}u_{+}^{(2s-1)}\right] = 0 \quad (k = 1,2,\ldots,n); \qquad (3.3)$$

$$c_{44}\Delta \underline{u}_3^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{n}\tilde\lambda_{2s-1}^{(k)}\,e^{(2s-1)} - c_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}u_3^{(2s)} + \right.$$

$$\left. +e_{33}h^{-1}\sum_{s=1}^{k}(4s-1)[\Phi^{(2s-2)} - \tfrac{1}{2}(\Phi^{+}+\Phi^{-})] + \tfrac{1}{2}(\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-})\right\} = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,n); \qquad (3.4)$$

$$\varepsilon_{11}\Delta\underline{\Phi}^{(2k)} + (4k+1)h^{-1}\left\{(e_{15}+e_{31})\sum_{s=k}^{n}e^{(2s-1)} + e_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(s-k)(2s+2k+1)u_3^{(2s)} + \right.$$

$$\left. +\varepsilon_{33}h^{-1}\sum_{s=k}^{n}(4s+3)[\Phi^{(2s)} - \tfrac{1}{2}(\Phi^{+}+\Phi^{-})]\right\} = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,n) \qquad (3.5)$$

$$\left(\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases}-c_{44}, & 0 \le s < k;\\ c_{13}, & k \le s \le n;\end{cases} \quad \tilde\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases}-c_{13}, & 1 \le s \le k;\\ c_{44}, & k < s \le n.\end{cases}\right).$$

Поскольку $\Phi^{+} + \Phi^{-} = 0$, то примем, что к лицевым граничным плоскостям пластины приложены механические напряжения σ_{33}^{+} и σ_{33}^{-}. Полагая $\sigma_{33}^{+} - \sigma_{33}^{-} = 2p$ ($p = \mathrm{const}$), представим частное решение данной системы в виде

$$c_{66}\hat u_3^{(2k)} = \eta_3^{(2k)}ph; \quad \hat\Phi^{(2k)} = \tilde\eta_3 ph \qquad (k = 0,1,\ldots,n);$$

$$\hat u_{+}^{(2k-1)} = 0; \hat e^{(2k-1)} = 0 \quad (k = 0,1,\ldots,n), \qquad (3.6)$$

где постоянные $\eta_3^{(2k)}$ и $\tilde\eta_3^{(2k)}$ определяются из равенств

$$\frac{c_{33}}{c_{66}}\sum_{s=1}^{n}\beta_{2s}^{(k)}\eta_3^{(2s)} - e_{33}\sum_{s=0}^{k-1}(4s+3)\tilde\eta_3^{(2s)} = 1;$$

$$\frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{66}}\sum_{s=k}^{n}(s-k)(2s+2k-1)\eta_3^{(2s)} + \sum_{s=k}^{n}(4s+3)\tilde\eta_3^{(2s)} = 0.$$

Изложим метод представления общего аналитического решения однородной системы уравнений (3.3) – (3.5). Запишем уравнения (3.4) и (3.5) при $k = 0$, тогда имеем

$$c_{44}\Delta u_3^{(0)} + e_{15}\Delta\Phi^{(0)} + c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}e^{(2s-1)} = 0;$$

$$e_{15}\Delta u_3^{(0)} - \varepsilon_{11}\Delta\Phi^{(0)} + (e_{15}+e_{31})h^{-1}\sum_{s=1}^{n} e^{(2s-1)} + \tag{3.7}$$

$$+e_{33}h^{-2}\sum_{s=1}^{n} s(2s+1)u_3^{(2s)} + \varepsilon_{33}h^{-1}\sum_{s=0}^{n}(4s+3)\Phi^{(2s)} = 0\,.$$

Определим из первого равенства выражение

$$\Delta u_3^{(0)} = -\frac{e_{15}}{c_{44}}\Delta\Phi^{(0)} - \frac{1}{h}\sum_{s=1}^{n} e^{(2s-1)}\,. \tag{3.8}$$

Тогда, согласно (3.8), второе равенство (3.7) примет вид

$$e_5\Delta\Phi^{(0)} - \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n}(4s+3)\Phi^{(2s)} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n} s(2s+1)u_3^{(2s)} - \frac{e_{31}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n} e^{(2s-1)} = 0\,. \tag{3.9}$$

Продифференцируем уравнения (3.3) по переменной z и полученные равенства сложим с их сопряженными. Учитывая при этом формулу (2.3), имеем

$$c_{11}\Delta e^{(2k-1)} + (4k-1)h^{-1}\Bigg[-c_{44}\Delta u_3^{(0)} - (e_{15}+e_{31})\Delta\Phi^{(0)} + \sum_{s=1}^{n}\lambda_{2s}^{(k)}\Delta u_3^{(2s)} -$$

$$-c_{44}h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s-1}^{(k)}e^{(2s-1)}\Bigg] = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n)\,. \tag{3.10}$$

Отсюда, исключая $\Delta u_3^{(0)}$, получаем уравнения

$$\Delta e^{(1)} - \frac{3e_{31}}{c_{11}h}\Delta\Phi^{(0)} + \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n}\Delta u_3^{(2s)} = 0 \quad (k=1)\,; \tag{3.11}$$

$$\Delta e^{(2k-1)} + \frac{4k-1}{c_{11}h}\Bigg[e_{15}\Delta\Phi^{(0)} - (e_{15}+e_{31})\Delta\Phi^{(2k-2)} + \sum_{s=1}^{n}\lambda_{2s}^{(k)}\Delta u_3^{(2s)} -$$

$$-\frac{c_{44}}{h}\sum_{s=1}^{n}\tilde{\alpha}_{2s-1}^{(k)}e^{(2s-1)}\Bigg] = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots, n)\,. \tag{3.12}$$

Из (3.11) следует равенство

$$e^{(1)} = \frac{3e_{31}}{c_{11}h}\Phi^{(0)} - \frac{3c_{13}}{c_{11}h}\sum_{s=1}^{n} u_3^{(2s)} - \frac{4\tilde{c}h}{c_{66}}\tilde{u}\,, \tag{3.13}$$

где $\tilde{u}$ – гармоническая функция;

$$\tilde{c} = c - e_1 e_{33}(c-e)/d\,c_{13}\varepsilon_{33}\,; \quad e = 1 - c_{13}e_{31}/c_{11}e_{33}\,; \quad d = 1 + e_{33}^2/c_{33}\varepsilon_{33}\,.$$

Согласно (3.13) уравнение (3.9) преобразуется к виду

$$e_5\Delta\Phi^{(0)} - \frac{3e_3\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\Phi^{(0)} - \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n}(4s+3)\Phi^{(2s)} -$$

$$-\frac{e_{31}}{\varepsilon_{11}h}\sum_{s=2}^{n} e^{(2s-1)} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=1}^{n}[(s-1)(2s+3)+3e]u_3^{(2s)} = -\frac{4\tilde{c}e_{33}}{\varepsilon_{11}c_{66}}\tilde{u}\,, \tag{3.14}$$

а уравнения (3.4) совместно с (3.5) принимают такой вид:

$$\frac{1}{4k+1}\Delta u_3^{(2k)} + \frac{3ee_{33}}{c_{44}h^2}\Phi^{(0)} + \frac{e_{33}}{c_{44}h^2}\sum_{s=1}^{k-1}(4s+3)\Phi^{(2s)} + \frac{1}{c_{44}h}\sum_{s=2}^{n}\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)}e^{(2s-1)} -$$

$$-\frac{c_{33}}{c_{44}h^2}\sum_{s=1}^{n}(\tilde{\beta}_{2s}^{(k)}+3c)u_3^{(2s)}=-\frac{4\tilde{c}c_{13}}{c_{44}c_{66}}\tilde{u} \quad (k=0,1,\ldots,n); \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{4k+1}\Delta\underline{\Phi}^{(2k)}+\frac{e_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=k}^{n}(4s+3)\underline{\Phi}^{(2s)}+\frac{e_{15}+e_{31}}{\varepsilon_{11}h}\sum_{s=k+1}^{n}e^{(2s-1)}+\\+\frac{e_{33}}{\varepsilon_{11}h^2}\sum_{s=k+1}^{n}(s-k)(2s+2k+1)u_3^{(2s)}=0 \quad (k=0,1,\ldots,n),\end{gathered} \tag{3.16}$$

где $e_1=-e_{31}+c_{13}e_{33}/c_{33}$; $e_2=-e_{15}+c_{44}e_{33}/c_{33}$; $e_3=1+e_{31}^2/c_{11}\varepsilon_{33}$; $e_5=1+e_{15}^2/\varepsilon_{11}c_{44}$;

$$\tilde{\beta}_{2s}^{(k)}=\begin{cases}(s-1)(2s+3), & 1\le s\le k;\\(k-1)(2k+3), & k\le s\le n.\end{cases}$$

Равенства (3.14) – (3.16) вместе с (3.12) образуют систему уравнений $6n$-го порядка относительно функций $u_3^{(2k)}$, $\Phi^{(2k)}$, $e^{(2k-1)}$. Решение представим в виде

$$\begin{gathered}\Phi^{(0)}=\nu_0^*h^2\tilde{u}+u_1; \quad c_{66}u_3^{(2)}=\nu_2^*h^2\tilde{u}+u_2; \quad \Phi^{(2k)}=u_{3k} \quad (k=0,1,\ldots,n);\\ c_{66}u_3^{(2k)}=u_{3k-1}; \quad c_{66}he^{(2k-1)}=u_{3k-2} \quad (k=2,3,\ldots,n),\end{gathered} \tag{3.17}$$

где функции u_k выражают общее решение однородной системы, которую в стандартной форме представим таким образом:

$$\sum_{k=1}^{3n}(a_{pk}-b_{pk}h^2\Delta)u_k=0 \quad (p=1,2,\ldots,3n); \tag{3.18}$$

ν_0^*, ν_2^* – постоянные ($\nu_0^*=-4e_1/3d\varepsilon_{33}c_{66}$; $3c_{33}\nu_2^*=4c_{13}(1-e_1e_{33}/dc_{13}\varepsilon_{33})$).

Замечание 2. Определим из (3.15) деформации $e^{(2k-1)}$:

$$\begin{gathered}e^{(3)}=\frac{h}{c^*}\left\{\frac{1}{9}\Delta\underline{u}_3^{(4)}+\frac{c_{44}}{(4n+1)c_{13}}\Delta\underline{u}_3^{(2n)}+\frac{3c^*ee_{33}}{c_{13}h^2}\Phi^{(0)}-\frac{3cc^*c_{33}}{c_{13}h^2}u_3^{(2)}+\right.\\ \left.+\frac{e_{33}}{c_{13}h^2}\sum_{s=2}^{n}(4s-1)\Phi^{(2s-2)}-\frac{c_{33}}{c_{13}h^2}\sum_{s=2}^{n}[(s-2)(2s+5)+c^*(3c+7)]u_3^{(2s)}+\frac{4\tilde{c}c^*}{c_{66}}\tilde{u}\right\};\end{gathered}$$

$$e^{(2k-1)}=\frac{h}{c^*}\left\{-\frac{1}{4k-3}\Delta\underline{u}_3^{(2k-2)}+\frac{1}{4k+1}\Delta u_3^{(2k)}+\frac{4k-1}{c_{44}h^2}\left[e_{33}\Phi^{(2k-2)}-c_{33}\sum_{s=k}^{n}u_3^{(2s)}\right]\right\}$$
$$(k=3,4,\ldots,n)$$

и внесем их значения в остальные уравнения. Тогда получим систему уравнений относительно функций $u_3^{(2k)}$, $\Phi^{(2k)}$.

Предполагая, что характеристическое уравнение $\det\left\| a_{pk}-k\,b_{pk}\right\|=0$ имеет $3n$ разных неравных нулю корней $k_1, k_2, \ldots, k_{3n}$, из (3.18) аналогичным §2 способом получим

$$u_k=\sum_{m=1}^{3n}D_m^{(k)}W_m, \tag{3.19}$$

где W_m – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам $\Delta W_m-k_mh^{-2}W_m=0$; $D_m^{(k)}$ – постоянные, значения которых определяются алгебраическими дополнениями элементов какой-либо строки определителя $\left| a_{pk}-k_m\,b_{pk}\right|_{3n\times 3n}$.

Если принять гармоническую функцию $\tilde{u}$ как действительную часть некоторой голоморфной функции $\varphi'(z)$, т.е.

$$\tilde{u} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}, \tag{3.20}$$

то решение (3.17) с учетом значений функций (3.19) примет вид

$$c_{66}u_3^{(2)} = \nu_2^* h^2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2)} W_m \; ; \;\; c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2k)} W_m \quad (k = 2,\, 3,\, \ldots,\, n)\,;$$

$$\Phi^{(0)} = \nu_0^* h^2 \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(0)} W_m \; ; \;\; \Phi^{(2k)} = \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(2k)} W_m \;\; (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)\,; \tag{3.21}$$

$$c_{66} h\, e^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2k-1)} W_m \qquad (k = 2,\, 3,\, \ldots,\, n)$$

$$(\, \tilde{c}_m^{(0)} = D_m^{(1)} \, ; \; \tilde{c}_m^{(2k)} = D_m^{(3k)} \, ; \; c_m^{(2k)} = D_m^{(3k-1)} \;\; (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)\,; \; c_m^{(2k)} = D_m^{(3k-2)}\,).$$

По имеющемуся решению (3.21) определяем

$$c_{66}e^{(1)} = -4h\left[\,\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + h^{-1} \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(1)} W_m \;, \tag{3.22}$$

$$c_{66}\Delta u_3^{(0)} = 4\left[\,\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(0)} \Delta W_m \tag{3.23}$$

$$\left(c_m^{(0)} = -\frac{e_{15}c_{66}}{c_{44}} \tilde{c}_m^{(0)} - \sum_{s=1}^{n} e_m^{-1} c_m^{(2s-1)} \; ; \quad c_m^{(1)} = \frac{3e_{31}c_{66}}{c_{11}} \tilde{c}_m^{(0)} - \frac{3c_{13}}{c_{11}} \sum_{s=1}^{n} c_m^{(2s)} \right).$$

Очевидно, что

$$c_{66}u_3^{(0)} = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi_*(z) + \overline{\chi_*(z)} + \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(0)} W_m \,, \tag{3.24}$$

где $\chi_*(z)$ – произвольная голоморфная функция.

Равенства (3.22) и (3.21) можно записать таким образом:

$$c_{66}(\partial_z u_+^{(1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(1)}) = -4h\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + 2h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(1)} \partial_z \partial_{\bar{z}} W_m \,;$$

$$c_{66}(\partial_z u_+^{(2k-1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k-1)}) = 2h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k-1)} \partial_z \partial_{\bar{z}} W_m \;\; (k = 2,3,\ldots,n)\,,$$

из которых определяем

$$\begin{aligned} c_{66}u_+^{(1)} &= -4h\varphi(z) + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(1)} \partial_{\bar{z}} W_m + ih\partial_{\bar{z}} Y_1 \,; \\ c_{66}u_+^{(2k-1)} &= h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_m + ih\partial_{\bar{z}} Y_{2k-1} \;\; (k = 2,\, 3,\, \ldots,\, n)\,, \end{aligned} \tag{3.25}$$

где $a_m^{(2k-1)} = 2e_m^{-1} c_m^{(2k-1)}$; Y_{2k-1} – произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Подставляя выражения (3.21) – (3.25) в уравнение (3.3), получим (после интегрирования по переменной $\bar{z}$) следующую систему уравнений:

$$\Delta Y_1 - \frac{3c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=1}^{n} Y_{2s-1} = -\frac{3ic_{44}}{c_{66}h^2} \left\{ \frac{8\tilde{c}_1 c_{11} h^2}{3c_{44}} [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] + 2[z\overline{\varphi(z)} - \bar{z}\varphi(z) + \overline{\chi_*(z)} - \chi_*(z)] \right\};$$

$$\Delta Y_{2k-1} - \frac{(4k-1)c_{44}}{c_{66}h^2}\sum_{s=1}^{n}\alpha_{2s-1}^{(k)}Y_{2s-1} =$$

$$= -\frac{(4k-1)ic_{44}}{c_{66}h^2}\left\{2\nu_2^* h^2[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] + 2[z\overline{\varphi(z)} - \bar{z}\varphi(z) + \overline{\chi_*(z)} - \chi_*(z)]\right\}$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)\ ,$$

где $\tilde{c}_1 = c_1 + e_1(e_1 - e_{15})/dc_{11}\varepsilon_{33}$. Решение ее представим в виде суммы частного

$$\widehat{Y}_1 = 2i\nu_1^* h^2[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] + 2i\,[z\overline{\varphi(z)} - \bar{z}\varphi(z) + \overline{\chi_*(z)} - \chi_*(z)]\ ;$$

$$\widehat{Y}_2 = -i\nu_3^* h^2[\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]\ ;\ \widehat{Y}_{2k-1} = 0\ \ (k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)\ , \tag{3.26}$$

и общего $Y_{2k-1} = y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$ решения однородной системы, которую представим в виде

$$\sum_{l=1}^{n}(p_{kl} - \delta_{kl}h^2\Delta)y_l = 0 \quad (k = 1,\ 2, \ldots, n)\ . \tag{3.27}$$

где δ_{kl} – символ Кронекера; $p_{kl} = (4k-1)\alpha_{2l-1}^{(k)}c_{44}/c_{66}$; $15\,c_{44}\nu_1^* = 4\,c_{11}(5\,c + c_2 + e_1 e_4/d\,c_{11}\,\varepsilon_{33})$; $15\,c_{44}\nu_3^* = 8c_{11}(c_2 + e_1\,(e_1 + e_2)/d\,c_{11}\,\varepsilon_{33})$; $e_4 = e_2 + 6\,e_1 - 5\,e_{15}$. Из (3.27) определим

$$y_k = \sum_{s=1}^{n} b_s^{(2k-1)}\omega_s\ , \tag{3.28}$$

где ω_s – метагармонические функции, обеспечивающие выполнение равенств $\Delta\omega_s - \lambda_s h^{-2}\omega_s = 0$, $\lambda_s \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ – корни соответствующего характеристического уравнения; $b_s^{(2k-1)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов любой строки определителя $\left|\,p_{kl} - \lambda_s\delta_{kl}\right|_{n\times n}$. Согласно равенств (3.26), (3.28) для перемещений (3.25) (с учетом $\chi(z) = \chi_*'(z)$) имеем формулы

$$c_{66}u_+^{(1)} = -2h\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \nu_1^* h^2\,\overline{\varphi''(z)} + \overline{\chi(z)}] + h\sum_{m=1}^{3n} a_m^{(1)}\partial_{\bar{z}}W_m + ih\sum_{s=1}^{n} b_s^{(1)}\partial_{\bar{z}}\omega_s\ ;$$

$$c_{66}u_+^{(3)} = \nu_3^* h^3\,\overline{\varphi''(z)} + h\sum_{m=1}^{3n} a_m^{(3)}\partial_{\bar{z}}W_m + ih\sum_{s=1}^{n} b_s^{(3)}\partial_{\bar{z}}\omega_s\ ; \tag{3.29}$$

$$c_{66}u_+^{(2k-1)} = h\sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k-1)}\partial_{\bar{z}}W_m + ih\sum_{s=1}^{n} b_s^{(2k-1)}\partial_{\bar{z}}\omega_s \quad (k = 3,\ 4, \ldots, n)\ .$$

Таким образом, значения функций (3.6), (3.21) – (3.24) и (3.29) составляют общее аналитическое решение системы уравнений (3.3) – (3.5), согласно которому определяется напряженное состояние электроупругих трансверсально-изотропных пластин.

Заключение.

Методом разложений искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра получены уравнения равновесия электроупругих трансверсально-изотропных пластин, поляризованных по толщине. Изложен способ построения общего аналитического решения уравнений при симметричном и кососимметричном (относительно срединной плоскости) деформировании пластин.

Р Е З Ю М Е . Запропоновано метод побудови загального аналітичного розв'язку рівнянь статичної електропружності нетонких трансверсально-ізотропних пластин, граничні площини яких електродовано і до яких підведено електричні заряди. В основу покладено метод розвинення невідомих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини. Побудовано систему диференціальних рівнянь і отримано загальний розв'язок, необхідний для визначення напруженого стану електропружних поляризованих по товщині пластин.

1. *Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А., Ковалев Ю.Д.* Растяжение пьезокерамического слоя, ослабленного сквозными туннельными полостями // Докл. РАН. – 2004. – **385,** №1. – С. 61 – 63.
2. *Жиров В.Е.* Электроупругое равновесие пьезокерамической плиты // Прикл. математика и механика. – 1977. – **41**, №6. – С. 1114 – 1121.
3. *Калоеров С.А., Баева А.И., Глущенко Ю.А.* Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела с полостями и плоскими трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 64 – 79.
4. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 159 с.
5. *Хома И.Ю.* О напряженном состоянии нетонкой пьезокерамической пластины с круговым отверстием // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 45 – 58.
6. *Хома И.Ю., Прощенко Т.М.* Про напружений стан трансверсально-ізотропного шару з круговою циліндричною порожниною // Доп. НАН України. – 2005. – № 10. – С. 64 – 69.
7. *Хома И.Ю.* Об уравнениях теории термопьезокерамических нетонких оболочек // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 2. – С. 18 – 22.
8. *Bisegna P., Caruso G.* Evaluation of Higher Order Theories of Piezoelectric Plates in Bending and Stretching // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – **38**, N 48 – 49. – P. 8805 – 8830.
9. *Cheng Z.Q., Lim C.W., Kitipornchai S.* Three-Dimensional Asymptotic Approach to Inhomogeneous and Laminated Piezoelectric Plates // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 33. – P. 3153 – 3175.
10. *Cicala P.* A Theory of Elastic Thin Shells and Edge Effects // Bul. Inst. Politech. Iasi. – 1962. – **8**, N 1 – 2. – P. 373 – 378.
11. *Dökmeci M.C.* On the Higher Order Theories of Piezoelectric Crystal Surfaces // J. Math. Phys. – 1974. – **15**, N 12. – P. 2248 – 2252.
12. *Kapuria S., Duble G.P., Dumir P.C.* First-Order Shear Deformation Theory Solution for a Circular Piezoelectric Composite Plate under Axisymmetric Load // Smart Mater. and Struct. – 2003. – **12**, N 3. – P. 417 – 423.
13. *Khoma I.Yu., Strygina O.A.* Influence of Elastic Properties on the Stress State of a Nonthin Transversely Isotropic Plate with a Circular Hole // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 1. – P. 67 – 79.
14. *Kirichok I.F.* Forced Resonant Vibrations and Self-Heating of a Flexible Plate with Piesoactuators // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, N 5. – P. 583 – 591.
15. *Kirichok I. F.* Forced Monoharmonic Vibrations and Self-Heating of Flexible Plate with Piezoactuators // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, N 6. – P. 715 – 725.
16. *Lee H.J., Saravanos D.A.* A Mixed Multi-Field Finite Element Formulation for Thermopiezoelectric Composite Sells // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 36. – P. 4944 – 4967.
17. *Mindlin R. D.* Equations of High Frequency Vibrations of Thermopiezoelectric Plates Under Strong Electric Fields // Int. J. Solids and Struct. – 1974. – **10**, N 6. – 625 – 637.
18. *Nemish Yu. N.*, *Khoma I. Yu.* Stress-Strain State of Non-Thin Plates and Shells. Generalized Theory (Survey) // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29,** N 11. – P. 873 – 902.
19. *Shodja H.M., Kamali M.T.* Three-Dimensional Analysis of Piezocomposite Plates with Arbitrary Geometry and Boundary Conditions // Int. J. Solids and Struct. – 2003. – **40**, N 18. – P. 4837 – 4858.
20. *Tzou H.S., Yang R. J.* Nonlinear Piezo-Thermoelastic Shell Theory Applied to Control of Variable-Geometry Shell // J. Theor. and Appl. Mech. (Poland) – 2000. – **38**, N 3. – P. 623 – 644.
21. *Vel S.S., Barta R.C.* Exact Solution for the Cylindrical Bending of Laminated Plates with Embedded Piezoelectric Fields // Smart Mater. and Struct. – 2001. – **10**, N 2. – P. 240 – 251.
22. *Yang J.S.* Equations for the Extension and Flexure of Electroelastic Plates under Strong Electric Fields // Int. J. Solids and Struct. – 1999. – **36**, N 21. – P. 3171 – 3192.

Поступила 27.09.2011 Утверждена в печать 03.12.2013.