

А. А. Каминский, М. Ф. Селиванов, Ю. А. Черноиван

## НАЧАЛЬНОЕ РАЗРУШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ДВУМЯ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ОДИНАКОВОЙ ДЛИНЫ

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: fract@inmech.kiev.ua*

**Abstract.** A stress-strain state of infinite linearly viscoelastic isotropic body is studied. The body is weakened by the collinear cracks of equal length and is subjected by the normal to the crack lines load of independent on time intensity. Basing on the opening obtained within the framework of the Leonov-Panasyuk-Dugdale model, the equations of sub-critical crack growth is derived in the zone of nonlinear deformations and a numerical algorithm of their solving is given. The solutions of equations of sub-critical cracks growth are analyzed when the duration of initial period of cracks growth, over which the opening at the tips of physical cracks reached the critical value, is determined.

**Key words:** viscoelasticity, collinear cracks, plate, Dugdale model.

### **Введение.**

Исследованиям линейных и нелинейных проблем механики разрушения посвящены работы [7, 9, 10 – 12]. Кинетика роста одной трещины в линейно вязкоупругом теле в рамках модели Леонова – Панасюка – Дагдейла исследована в работах [2, 13]. Задача о развитии систем трещин в вязкоупругих телах решено значительно меньше, хотя эта проблема очень важна, поскольку коллинеарные трещины при развитии в условиях ползучести материала могут объединяться в магистральную трещину, которая приводит к полному разрушению вязкоупругого тела. Решение одной из таких задач для двух коллинеарных макротрещин одинаковой длины в вязкоупругой пластине при растяжении приведено в монографии [2]. Однако эта задача решена численным методом только для малых зон предразрушения на основе приближённого решения упругопластической задачи, приведенного в работе [1], причём были рассмотрены лишь некоторые простые модели вязкоупругих тел, а также симметричное развитие обеих трещин.

Ниже рассмотрена аналогичная задача, но для немалых зон предразрушения на основе точного решения упругопластической задачи, приведенного в работе [3] с учётом современных прикладных моделей вязкоупругости.

Исследование проведено по следующей схеме: определено упругое раскрытие в зонах нелинейной деформации двух коллинеарных трещин одинаковой длины, выяснено изменение этого раскрытия со временем; построено уравнение докритического роста трещин; приведена схема численного решения полученных уравнений; дан анализ численных решений.

### **1. Постановка задачи.**

Пусть в упругом бесконечном изотропном вязкоупругом теле вдоль одной прямой расположена система двух коллинеарных трещин одинаковой длины, которая находится под действием однородного напряжения  $p$ , приложенного на бесконечности перпендикулярно к линии трещин. Введём ортогональную декартову систему координат, ось  $x$  которой направим вдоль линии трещин (рис. 1).

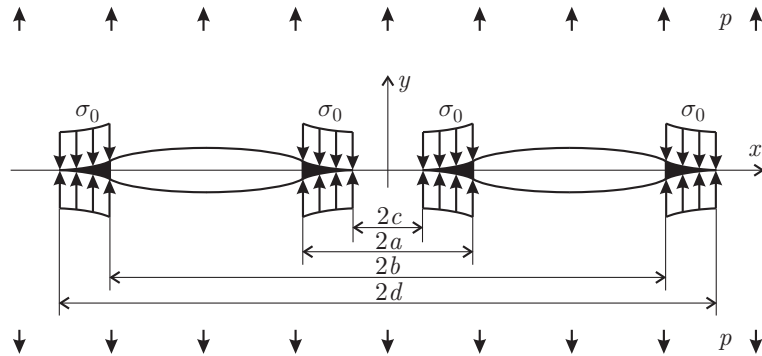


Рис. 1

Согласно модели Леонова – Панасюка – Дагдейла примем, что области нелинейного поведения материала в окрестности вершин трещин можно заменить разрезами, к берегам которых приложены сжимающие напряжения интенсивности  $\sigma_0$ . Соответствующие обозначения представлены на рис. 1.

Граничные условия поставленной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} v = 0, \quad \tau_{12} = 0 & \quad \text{при} \quad |x| < c \cup |x| > d; \\ \sigma_{22} = \sigma_0, \quad \tau_{12} = 0 & \quad \text{при} \quad c \leq x < a \cup b < x \leq d; \\ \sigma_{22} = -p, \quad \tau_{12} = 0 & \quad \text{при} \quad a \leq |x| \leq b, \end{aligned}$$

причём координаты концов разрезов следует определять из условия конечности напряжений в вершинах трещин. Граничное состояние трещин в вязкоупругом теле будем определять согласно критерию критического раскрытия в вершине трещины [2, 9].

## 2. Соотношения для упругого раскрытия трещин.

Для построения разрешающих уравнений вязкоупругой задачи воспользуемся принципом Вольтерра, применимость которого к данной задаче легко доказать с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в монографии [2].

Для определения условий упругого равновесия и деформированного состояния материала вокруг трещины важным является определение зависимости между нагрузкой на трещину, геометрическими параметрами трещины и её раскрытием.

Общее решение задачи для плоскости с прямолинейными разрезами в работе [4] представлено двумя комплексными функциями  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y + \sigma_x &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}]; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2[\overline{\Omega(\bar{z})} - \Phi(z) - (z - \bar{z})\Phi'(z)]; \\ 2\mu(u + iv) &= \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\kappa = (3\lambda + \mu)/(\lambda + \mu)$ ;  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе материала пластины,

$$\omega(z) = \int \Omega(z) dz, \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz.$$

Функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  для рассмотренной задачи определены в работе [1] и имеют вид

$$\Phi(z) = \Omega(z) - \frac{p}{2} = -\frac{\sigma_0}{\pi i} \ln U(z) - \frac{p}{4} \quad (2)$$

$$\left( U(z) = \ln \frac{(d_a z_c + a_c d_z) b_z}{(d_b z_c + b_c d_z) z_a}; d_a^2 = d^2 - a^2, z_c^2 = z^2 - c^2 \text{ и т.п., } d_a = \sqrt{d_a^2}, z_c = \sqrt{z_c^2} \text{ и т.п.} \right).$$

Для обеспечения ограниченности и непрерывности напряжений в точках  $z = \pm c$  и  $z = \pm d$  должны выполняться следующие равенства:

$$d_c^2 \cos^2 \rho_1 = a_c^2 + b_c^2 - 2a_c b_c \sin \rho_1;$$

$$d_a a_c \left[ F(k) + \frac{a^2}{d_a^2} \Pi \left( -\frac{d_c^2}{d_a^2}, k \right) \right] = d_b b_c \left[ F(k) + \frac{b^2}{d_b^2} \Pi \left( -\frac{d_c^2}{d_b^2}, k \right) \right], \quad (3)$$

где  $F(k)$  и  $\Pi(n, k)$  – полные эллиптические интегралы первого и третьего родов соответственно;  $\rho_1 = \pi/2\rho_2$ ,  $\rho_2 = \sigma_0/p$  – параметры нагружения.

Уравнение (3) учтено при получении выражений (2) и использовано для определения внешних границ зон нелинейного поведения материала  $c$  и  $d$ .

При  $c = 0$  и  $a > 0$  из первого из уравнений (3) определим  $d$ :

$$d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \sin \rho_1}}{\cos \rho_1};$$

второе уравнение при этом переходит в неравенство  $\frac{bd}{ab} \leq \text{ch} \left( \frac{b}{a} \text{arch} \frac{d}{b} \right)$ , которое является условием положительности вертикального перемещения в точке начала координат.

Вертикальное перемещение для случая  $c > 0$  получим из (1) подстановкой функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ :

$$v(x) = \frac{\rho_3 p}{E} \text{Re} \int_c^x U(z) dz; \quad \rho_3 = \frac{4\rho_2}{\pi}, \quad (4)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала пластины.

Обозначив  $\tilde{v} = Ev / \rho_3 p$  и выполнив интегрирование в (4), получим

$$\tilde{v}(x) = xU_1(x) - q_a \Pi_a(x) + q_b \Pi_b(x);$$

$$U_1(x) = \text{Re} U(x) = \ln \frac{(d_a x_c + a_c d_x) \sqrt{|b_x^2|}}{(d_b x_c + b_c d_x) \sqrt{|x_a^2|}};$$

$$q_a = \frac{d_a c^2}{d a_c}; \quad \Pi_a(x) = \Pi(\varphi(x), -n_a, k); \quad n_a = \frac{d_c a^2}{d^2 a_c^2};$$

$$q_b = \frac{d_b c^2}{d b_c}; \quad \Pi_b(x) = \Pi(\varphi(x), -n_b, k); \quad n_b = \frac{d_c b^2}{d^2 b_c^2};$$

где  $\Pi(\varphi, n, k)$  – неполный эллиптический интеграл третьего рода,

$$\varphi(x) = \arcsin\left(\frac{xx_c}{k}\right); k = \frac{d_c}{d}.$$

При  $x = a$  и  $x = b$ , соответственно, получим равенства

$$\begin{aligned} \tilde{v}(a) &= a \ln \frac{d_a(a+c)b_a}{(d_b a_c + b_c d_a)a} + \frac{b}{2} \ln \frac{(a+b)(b-c)}{(b-a)(b+c)} - \\ &- dE_a \left( \frac{d_a}{a_c} - \frac{d_b}{b_c} \right) + \frac{d_a^2}{a} - \frac{d_a d_b a_c}{ab_c} + d_c^2 \left( \frac{I_{aa}}{a_c} - \frac{I_{ba}}{b_c} \right); \\ \tilde{v}(b) &= b \ln \frac{(d_a b_c + a_c d_b)b}{d_b(b+c)b_a} + \frac{a}{2} \ln \frac{(b-a)(a+c)}{(a+b)(a-c)} - \\ &- dE_b \left( \frac{d_a}{a_c} - \frac{d_b}{b_c} \right) + \frac{d_a d_b b_c}{ba_c} - \frac{d_b^2}{b} + d_c^2 \left( \frac{I_{ab}}{a_c} - \frac{I_{bb}}{b_c} \right); \end{aligned}$$

$$E_a = E(\kappa_a, k); \kappa_a = \arcsin \frac{a_c}{ak}; E_b = E(\kappa_b, k); \kappa_b = \arcsin \frac{b_c}{bk},$$

где  $E(\varphi, k)$  – неполный эллиптический интеграл второго рода,

$$\begin{aligned} I_{aa} &= \int_c^a \frac{x^2 dx}{d_x(d_a x_c + a_c d_x)}; I_{ba} = \int_c^a \frac{x^2 dx}{d_x(d_b x_c + b_c d_x)}; \\ I_{ab} &= \int_c^b \frac{x^2 dx}{d_x(d_a x_c + a_c d_x)}; I_{bb} = \int_c^b \frac{x^2 dx}{d_x(d_b x_c + b_c d_x)}. \end{aligned}$$

Вертикальное перемещение для случая  $c = 0$  (внутренние зоны нелинейного поведения материала объединились) будет иметь вид

$$\tilde{v}(x) = \operatorname{Re} \int_a^x U(z) dz.$$

После интегрирования получим равенство

$$\tilde{v}(x) = x \ln \frac{(d_a x + ad_x) \sqrt{|b_x^2|}}{(d_b x + bd_x) \sqrt{|x_a^2|}} + \frac{a}{2} \ln \frac{|d_x - d_a|}{d_x + d_a} - \frac{b}{2} \ln \frac{|d_x - d_b|}{d_x + d_b}.$$

При  $x = a$  и  $x = b$ , соответственно, имеем формулы

$$\begin{aligned} \tilde{v}(a) &= a \ln \frac{ab_a}{d_b a + bd_a} + \frac{b}{2} \ln \frac{d_a + d_b}{d_a - d_b}; \\ \tilde{v}(b) &= \frac{a}{2} \ln \frac{d_a - d_b}{d_a + d_b} + b \ln \frac{d_a b + ad_b}{bb_a}. \end{aligned}$$

При  $a = 0$  определим перемещение берегов трещины длиной  $2b$

$$\tilde{v}(x) = x \ln \frac{d\sqrt{b_x^2}}{d_b x + b d_x} - \frac{b}{2} \ln \frac{|d_x - d_b|}{d_x + d_b}. \quad (5)$$

Подставляя  $x = b$  в решение (5), получим перемещение в конце физической трещины длиной  $2b$ , т.е.

$$\tilde{v}(b) = b \ln \frac{d}{b}.$$

### 3. Вязкоупругое раскрытие двух коллинеарных трещин одинаковой длины.

Вследствие симметрии задачи о распространении коллинеарных трещин, определим координаты физических концов одной (на рис. 1 – правой) трещины  $a$  и  $b$  как функции времени. Конец  $x = a$ , более близкий к началу координат, будем называть левым, конец  $x = b$  – правым. Полагаем начальную безразмерную длину трещины  $b_0 - a_0$  равной единице.

Изучим развитие трещин на протяжении инкубационного периода. Как и в случае распространения одной трещины, время окончания инкубационного периода двух коллинеарных трещин является моментом начала увеличения длины трещин.

Конец первого этапа роста коллинеарных трещин определим условием достижения раскрытием в левом и правом концах физической трещины ( $\delta(a_0, t)$  и  $\delta(b_0, t)$ , соответственно) критического значения  $\delta^*$  или слиянием трещин к достижению критического раскрытия в правом конце. Упругое раскрытие в левом конце всегда будет превышать раскрытие в правом. Расхождения между двумя раскрытиями будут возрастать при сближении трещин. Величины  $\delta(a_0, t)$  и  $\delta(b_0, t)$  не будут равными на протяжении первого этапа, как для случая одной трещины. При значительном отдалении трещин влияние одной трещины на раскрытие на продолжении второй трещины будет нивелироваться, моменты времени достижения величинами  $\delta(a_0, t)$  и  $\delta(b_0, t)$  критического значения будут отличаться несущественно. В этом случае на следующем этапе роста трещины будут распространяться в обе стороны.

Запишем основной закон наследственной упругости в такой форме:

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t R_{ijkl}(t - \tau) d\varepsilon_{kl}(\tau), \quad (6)$$

где  $R$  – функции релаксации материала (в случае изотропного материала независимых функций две, например, модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ ). Эти функции с требуемой точностью можно описать физически обоснованной моделью [5, 6, 14] в виде:

$$1) R(t) = R_\infty + \sum_i a_i E_{\delta,1}(-b_i t^\delta); \quad (7)$$

$$2) R(t) = R_0 - \sum_i \lambda_k \left[ 1 - E_{\delta,1}(-b_i t^\delta) \right], \quad (8)$$

где  $R_\infty$  и  $R_0$  – долговременное и мгновенное значение механической характеристики,

$$E_{\delta,\gamma}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\delta n + \gamma)} \quad (9)$$

– функция Миттаг – Леффлера;  $\Gamma$  – гамма-функция Эйлера. При  $\delta = 1$  и  $\gamma = 1$  функция (9) превращается в экспоненту. Отметим свойство функции Миттаг – Леффлера, которая будет использована ниже для определения преобразований Лапласа  $\mathcal{L}$  и обратных преобразований Лапласа  $\mathcal{L}^{-1}$  функций времени, т.е.

$$\mathcal{L}\{t^{\gamma-1}E_{\delta,\gamma}(-bt^\delta)\} = \frac{s^{\delta-\gamma}}{s^\delta + b}. \quad (10)$$

Для качественного исследования при учете релаксационных свойств материала используем лишь одно слагаемое в (9). В этом случае модуль Юнга  $E$ , который входит в выражение для упругого решения (6) в области изменения времени представим в форме

$$E(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)E_{\delta,1}(-bt^\delta). \quad (11)$$

Для построения решения в области времени для раскрытия трещины воспользуемся принципом упруго-вязкоупругой аналогии [8], заменяя зависимую от времени характеристику релаксации [13] соответствующей преобразованной величиной [5]

$$\tilde{E}(s) = E_\infty + (E_0 - E_\infty)\frac{s^\delta}{s^\delta + b},$$

где  $\tilde{E}(s) = s\mathcal{L}\{E(t)\}$  – преобразование Лапласа – Карсона функции времени  $E(t)$ ,  $s$  – параметр преобразования.

Определим изображение Лапласа – Карсона функции  $\frac{1}{2}L(t)$ :

$$\frac{\tilde{L}(s)}{2} = \frac{1}{\tilde{E}(s)} = \frac{1}{E_\infty + (E_0 - E_\infty)\frac{s^\delta}{s^\delta + b}} = E_\infty^{-1} + (E_0^{-1} - E_\infty^{-1})\frac{s^\delta}{s^\delta + \frac{E_0^{-1}}{E_\infty^{-1}}b}. \quad (12)$$

Вводя обозначения для мгновенного и долговременного модулей податливости пластины  $D_0 = E_0^{-1}$  и  $D_\infty = E_\infty^{-1}$ , представим (12) в виде

$$\frac{\tilde{L}(s)}{2} = D_\infty + (D_0 - D_\infty)\frac{s^\delta}{s^\delta + \beta} = D_0\left(1 + \frac{\lambda}{s^\delta + \beta}\right), \quad (13)$$

где  $\beta = (D_0 / D_\infty)b$  и  $\lambda = (D_\infty / D_0 - 1)\beta$  – параметры функции ползучести.

Используя (10), согласно (13) в области изменения времени получим функции:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{1}{2}L(t) &= D_\infty + (D_0 - D_\infty)E_{\delta,1}(-\beta t^\delta); \\ 2) \quad \frac{1}{2}L(t) &= D_0 + (D_\infty - D_0)\left[1 - E_{\delta,1}(-\beta t^\delta)\right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя (13), можно определить функцию скорости ползучести

$$\frac{1}{2}L'(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\tilde{L}(s) - \tilde{L}_\infty\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{D_0\lambda}{s^\delta + \beta}\right\} = D_0\lambda t^{\delta-1}E_{\delta,\delta}(-\beta t^\delta). \quad (15)$$

Раскрытие в направлении оси  $Oy$  в точке с координатой  $(x, 0)$  как функцию от времени можно, как и соотношение между напряжениями и деформациями в наследственном теле, записать в форме интеграла Больцмана:

$$1) \delta(x, t) = \int_0^t L(t-\tau) dv[x; a(\tau), b(\tau)]; \quad (16)$$

$$2) \delta(x, t) = L_0 v[x; a(t), b(t)] + \int_0^t L'(t-\tau) v[x; a(\tau), b(\tau)] d\tau. \quad (17)$$

В выражениях (16) и (17)  $L(t)$  и  $L'(t)$  определяются выражениями (14) и (15), соответственно, а упругое вертикальное перемещение берегов трещины, в определении которого введены координаты концов трещины  $v(x; a; b) = Ev(x)$ , где  $v(x)$  соответствует выражению (4).

**Уравнение докритического роста коллинеарных трещин одинаковой длины.**

В [2] предложены уравнения для определения параметров начального этапа развития одной трещины в вязкоупругом теле в форме

$$1) \int_0^t L(t-\tau) dv[a(t); a(\tau)] = L_0 v^*; \quad (18)$$

$$2) L_0 v[a(t), a(t)] + \int_0^t L'(t-\tau) v[a(t); a(\tau)] d\tau = L_0 v^*, \quad (19)$$

где  $Lv(x; a)$  – упругое раскрытие трещины длиной  $a$  в точке  $x$ ;  $L = 2/E$  для случая изотропного материала с модулем Юнга  $E$ ,  $\delta^* = L_0 v^*$  – критическое раскрытие трещины.

Критическое раскрытие для каждого материала определяется экспериментально и является одной из основных характеристик трещиностойкости. Левая часть определяющего уравнения (18) или (19) является выражением для раскрытия  $\delta(x, t)$  в точке  $x = a(t)$  на линии трещины в момент времени  $t$ , записанной в форме интеграла Больцмана наследственной упругости.

Аналогом уравнения докритического роста одной трещины (18) или (19) в случае двух коллинеарных трещин одинаковой длины является система уравнений

$$\delta(x = a(t), t) = \delta^*; \quad \delta(x = b(t), t) = \delta^*. \quad (20)$$

Подставляя в эту систему выражение для  $\delta(x, t)$  из (19) и  $\delta^* = L_0 v^*$ , получим

$$v[a(t); a(t); b(t)] + \int_0^t l'(t-\tau) v[a(t); a(\tau); b(\tau)] d\tau = v^*; \quad (21)$$

$$v[b(t); a(t); b(t)] + \int_0^t l'(t-\tau) v[b(t); a(\tau); b(\tau)] d\tau = v^*,$$

где  $l(t) = L(t)/L_0$ . Уравнения (21) являются нелинейными уравнениями типа Вольтерра.

Инкубационный период  $t_0$  развития одиночной трещины определяется как время достижения раскрытием в вершине трещины критического значения. Конец инкубационного периода является началом роста длины трещины. Этот момент времени ( $t_0$ ) можно определить с помощью уравнения (17):  $L(t_0)v(a_0; a_0) = \delta^*$ .

Аналогично, при исследовании роста коллинеарных трещин определяем время инкубационного периода как момент начала роста длины трещин. Учитывая то, что упругое раскрытие в левом конце трещины превышает раскрытие в правом конце, время инкубационного периода  $t_0$  будет определяться условием достижения раскрытием в левом конце критического значения, т.е.

$$L(t_0)v(a_0; a_0, b_0) = \delta^* \quad (22)$$

За время  $t_0$  раскрытие в правом конце возрастет до величины  $L(t_0)v(b_0; a_0; b_0)$ , которая не будет превышать  $\delta^*$ .

Начиная с момента времени  $t_0$ , длина трещины начинает возрастать. Пока выполняется условие

$$\delta(x = b_0, t) < \delta^*, \quad (23)$$

координаты левого конца будем определять из первого из уравнений системы (21). Момент времени  $t_{b0}$  соответствует достижению раскрытия в правом конце трещины критического значения. С момента времени  $t_{b0}$  начнется следующий этап распространения трещин (он является предметом исследований последующих работ).

#### 4. Численное решение уравнений роста трещин.

Для проведения анализа решения задачи, вместо экспериментально определяемого параметра трещиностойкости материала пластины  $\delta^*$ , введём модельный параметр  $k_\delta$ , который характеризует уровень критического раскрытия трещины в пластине из этого материала. Тогда при  $0 < k_\delta < 1$  одиночная трещина обязательно начнёт докритический рост. Введение параметра  $k_\delta$  проиллюстрировано на рис. 2.

Исследуем решения задачи при уровнях внешней нагрузки, которые соответствуют изменению модельного параметра  $\rho_2$  в пределах от 6 до 10. Рассмотрим одну трещину единичной длины, раскрытие в вершинах которой можно определить как  $Lv(0, 5; 0; 0, 5)$ , в зависимости от параметра  $\rho_2$ . Вычислим величины

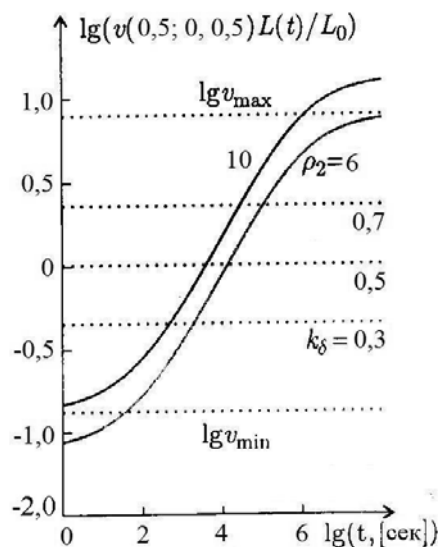


Рис. 2

$$v_{\min} = \min_{t, \rho_2} \left\{ \frac{L(t)}{L_0} v(0, 5; 0; 0, 5) \right\}; \quad v_{\max} = \max_{t, \rho_2} \left\{ \frac{L(t)}{L_0} v(0, 5; 0; 0, 5) \right\}.$$

Рассмотрим уровни критического раскрытия  $\delta^* = L_0 v^*$ , где  $v^*$  определяется уровнем параметра  $k_\delta$  следующим образом:  $\lg v^* = \lg v_{\min} + k_\delta (\lg v_{\max} - \lg v_{\min})$ .

Для численного решения уравнений системы разобьём отрезок на продолжении трещины от точки  $a_0$  до точки  $a_*$  на  $N$  отрезков. Тогда из первого из уравнений системы (21) можно последовательно определять время прохождения трещиной  $i$ -го узла разбивки  $a_i = a(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . В пределах каждого временного



интервала представляем решение  $a(t)$  в форме показательной функции  $a(t) = a_{i-1}(a_i / a_{i-1})^{(t-t_{i-1})/(t_i-t_{i-1})}$ , которая удовлетворяет условиям  $a(t_{i-1}) = a_{i-1}$ ,  $a(t_i) = a_i$ .

Продолжительность инкубационного периода  $t_0$  определяем из уравнения (22). Моменты времени  $t_i$  прохождения  $i$ -го узла разбивки определим из уравнения

$$v(a_i; a_i, b_0) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v(a_i; a(\tau), b_0) d\tau = v^*. \quad (24)$$

При  $a_i < c_0$  имеем  $v(a_i; a(\tau), b_0) = 0$ ,  $\tau < t'$ , где  $t'$  удовлетворяет уравнению  $c(t') = a_i$ ; интегрирование в (24) можно проводить не от нуля, а от  $t'$ . Определив каждый следующий момент времени  $t_i$ , проверяем выполнение условия (23):

$$v(b_0; a_i, b_0) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v(b_0; a(\tau), b_0) d\tau < v^*. \quad (25)$$

При выполнении условия (25) переходим к определению следующего  $t_i$ , если условие не выполняется, определяем время  $t_{b_0}$  окончания первого этапа развития двух коллинеарных трещин из системы уравнений двух переменных, собственное  $t_{b_0}$  и  $a_{b_0}$  – координаты левого конца в момент времени  $t_{b_0}$ :

$$v[a_{b_0}; a_{b_0}, b_0] + \int_0^{t_{b_0}} l'(t_{b_0} - \tau) v[a_{b_0}; a(\tau), b_0] d\tau = v^* ;$$

$$v[b_0; a_{b_0}, b_0] + \int_0^{t_{b_0}} l'(t_{b_0} - \tau) v[b_0; a(\tau), b_0] d\tau = v^* ; \quad (26)$$

## 5. Анализ полученных результатов и выводы.

На основе полученных определяющих уравнений можно сделать следующие выводы. Если начальное положение ближних вершин трещин достаточно близко, то для определения продолжительности первого этапа следует обратить внимание на один момент, важный для моделирования процесса докритического роста трещин. При достижении раскрытием в ближних вершинах критического значения трещины начинают подрастать навстречу друг другу. Докритический рост будет длиться до момента времени, когда расстояние между трещинами достигнет критической длины, определяемой из условия равенства упругого раскрытия в ближних вершинах критическому значению  $\delta^*$ , при неизменном положении дальних вершин. Во время роста трещин навстречу друг другу вязкоупругое раскрытие в дальних вершинах может как достичь, так и не достичь критического значения.

Если вязкоупругое раскрытие в дальних вершинах достигает критического значения, трещина начнет расти в обе стороны (как и в случае достаточного разнесения трещин).

Все дальнейшие численные результаты получены для материала пластины с такими реологическими параметрами модели (13):  $E_\infty = 40$  МПа;  $E_0 = 4000$  МПа;  $\delta = 0,5$ ;  $b = 0,1 \text{ сек}^{-\delta}$ .

Проведём анализ полученных результатов. В таблице для каждой тройки  $a_0, \rho_2, k_\delta$  параметров задачи приведены два момента времени:  $t_0$  и  $t_{b_0}$  (в часах). Звёздочки соответствуют тем случаям, когда этап слияния трещин начинается до момента достижения величиной раскрытия в правом конце  $\delta(b_0, t)$  критического значения.

| $a_0$ | $k_\delta$ | $\rho_2$ |          |        |         |        |       |
|-------|------------|----------|----------|--------|---------|--------|-------|
|       |            | 6        |          | 8      |         | 10     |       |
| 0,06  | 0,3        | 0,00167  | 0,0167*  | 0,0263 | 0,0549* | 0,065  | 0,251 |
|       | 0,5        | 0,0814   | 0,0829*  | 0,324  | 0,792*  | 0,625  | 2,15  |
|       | 0,7        | 0,745    | 0,83*    | 2,44   | 5,85*   | 4,52   | 15,8  |
| 0,07  | 0,3        | 0,00766  | 0,00928* | 0,0368 | 0,107*  | 0,0839 | 0,295 |
|       | 0,5        | 0,155    | 0,227*   | 0,409  | 1,26    | 0,763  | 2,28  |
|       | 0,7        | 1,27     | 1,97*    | 3,02   | 9,09    | 5,49   | 16,8  |
| 0,08  | 0,3        | 0,0122   | 0,0191*  | 0,0471 | 0,157   | 0,102  | 0,311 |
|       | 0,5        | 0,2      | 0,397*   | 0,489  | 1,34    | 0,895  | 2,37  |
|       | 0,7        | 1,58     | 3,26*    | 3,57   | 9,65    | 6,42   | 17,6  |
| 0,09  | 0,3        | 0,0166   | 0,034*   | 0,057  | 0,169   | 0,12   | 0,323 |
|       | 0,5        | 0,241    | 0,623    | 0,565  | 1,39    | 1,02   | 2,44  |
|       | 0,7        | 1,86     | 4,6      | 4,1    | 10      | 7,31   | 18,1  |
| 0,10  | 0,3        | 0,0209   | 0,0529*  | 0,0665 | 0,176   | 0,136  | 0,331 |
|       | 0,5        | 0,279    | 0,666    | 0,636  | 1,43    | 1,14   | 2,49  |
|       | 0,7        | 2,13     | 4,85     | 4,59   | 10,4    | 8,16   | 18,6  |
| 0,20  | 0,3        | 0,0556   | 0,0915   | 0,14   | 0,216   | 0,264  | 0,394 |
|       | 0,5        | 0,554    | 0,822    | 1,16   | 1,69    | 2,02   | 2,92  |
|       | 0,7        | 4,03     | 5,91     | 8,35   | 12,3    | 14,8   | 22    |
| 0,30  | 0,3        | 0,0773   | 0,102    | 0,185  | 0,236   | 0,34   | 0,427 |
|       | 0,5        | 0,715    | 0,895    | 1,48   | 1,83    | 2,55   | 3,15  |
|       | 0,7        | 5,15     | 6,42     | 10,6   | 13,3    | 19     | 23,9  |
| 0,40  | 0,3        | 0,0912   | 0,109    | 0,213  | 0,249   | 0,388  | 0,449 |
|       | 0,5        | 0,816    | 0,942    | 1,67   | 1,92    | 2,88   | 3,3   |
|       | 0,7        | 5,86     | 6,75     | 12,1   | 14      | 21,7   | 25,2  |
| 0,50  | 0,3        | 0,101    | 0,113    | 0,232  | 0,258   | 0,421  | 0,465 |
|       | 0,5        | 0,883    | 0,975    | 1,8    | 1,98    | 3,1    | 3,41  |
|       | 0,7        | 6,34     | 6,99     | 13,1   | 14,5    | 23,6   | 26,2  |

На рис. 3 для значений параметров задачи  $a_0 = 0,1$ ,  $\rho_2 = 6$  и  $k_\delta = 0,3$  приведены диаграммы зависимости расположения вершин трещин от времени (верхний блок), а также графики вертикальных перемещений берегов трещины в левой (левый нижний график) и правой (правый нижний график) зонах нелинейных деформаций в моменты времени  $t = t_i$  прохождения левым концом  $i$ -го узла разбивки

$$v(x) = v(x; a_i, b_0) + \int_0^{t_i} l'(t_i - \tau) v(x; a(\tau), b_0) d\tau$$

( $c_i \leq x \leq a_i$  – для левой зоны нелинейных деформаций,  $b_0 \leq x \leq d_i$  – для правой).

Разбивка построена таким образом, чтобы один из узлов совпал с точкой  $x = c_0$  на продолжении трещины. Этого можно достичь, сделав длину каждого следующего интервала разбивки в  $q > 1$  раз большей длины предыдущего интервала. Такой выбор узлов оказывается лучшим по сравнению с разбивкой на интервалы одинаковой длины по той причине, что скорость роста размера трещины увеличивается со временем.

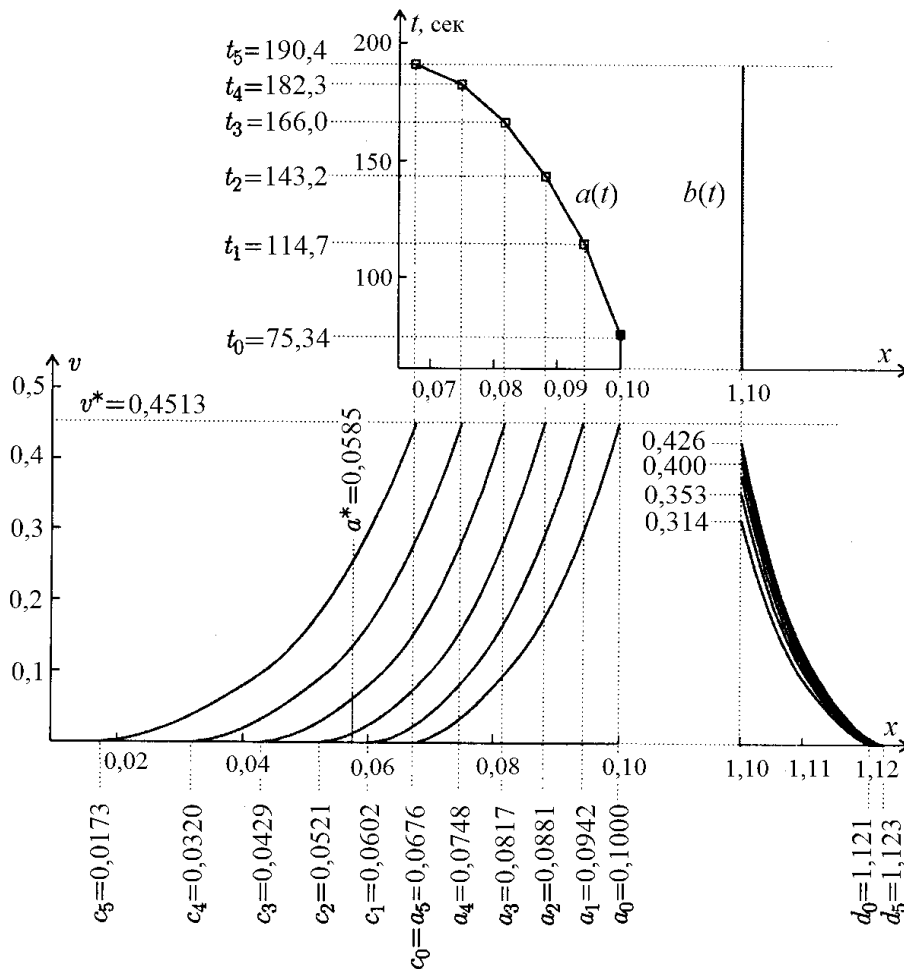


Рис. 3

Для приведенного на рис. 3 решения этап слияния начинается в момент времени  $t = t_5 = 190,4$  сек (обычно это значение можно уточнять путем увеличения числа узлов разбивки  $N$ ). Вертикальное перемещение в правой вершине трещины ( $v(b_0; a_5; b_0) = 0,426$ ) не достигло критического значения ( $v^* = 0,4513$ ) к началу этапа слияния. Также укажем, что для исследованной комбинаций исходных параметров не состоялось слияние зон предразрушения к началу этапа слияния трещин ( $c_5 = 0,0173 > 0$ ).

На рис. 4 для значений параметров задачи  $a_0 = 0,08$ ,  $\rho_2 = 8$  и  $k_\delta = 0,3$  проиллюстрированы аналогичные результаты исследования. Разность между этим и предыдущим случаем заключается в том, что вертикальное перемещение в правой вершине трещины достигло критического значения к началу этапа слияния. Для полученного момента времени  $t_4$  прохождения левым концом трещины узла разбивки  $a_4$  (какие – не уточняем, а вместо них приводим значение  $t_4 = t_{b_0}$  и  $a_4 = a_{b_0}$ ) условие (25) не было выполнено, поэтому длительность первого этапа слияния двух коллинеарных трещин  $t_{b_0} = 565,5$  сек и соответствующее значение координаты левого конца трещины  $a_{b_0} = a(t_{b_0}) = 0,0593$  было получено из системы уравнений (26).

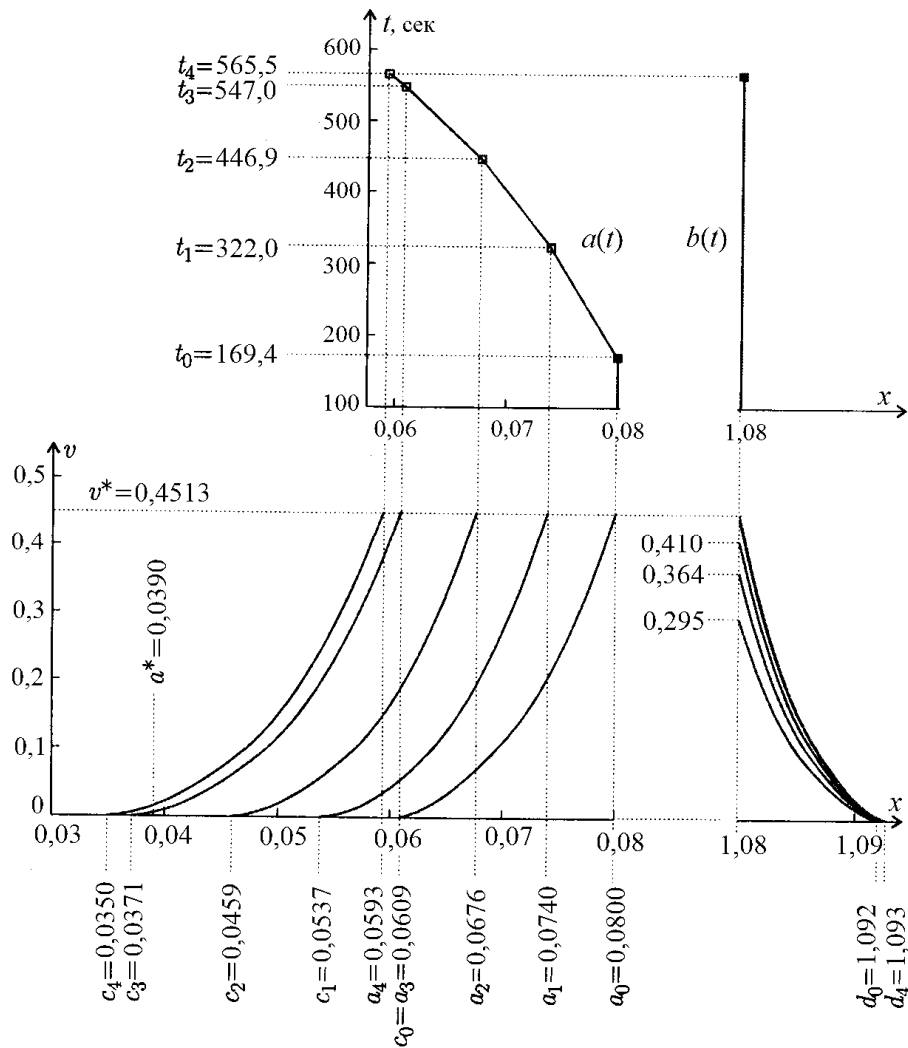


Рис. 4

### Заключення.

Предложен подход к решению задачи о развитии системы двух коллинеарных трещин; он эффективен для определения продолжительности и характера развития трещин в изотропных вязкоупругих нестареющих материалах на протяжении начального периода. Решения для задач о развитии трещин в случае, когда построение упругого решения затруднено, могут быть получены на основе работы [15].

**РЕЗЮМЕ.** Досліджено напружено-деформований стан нескінченного лінійно в'язкоупругого ізотропного тіла, послабленого колінеарними тріщинами рівної довжини, під дією нормального до ліній тріщин навантаження, інтенсивність якого не змінюється з часом. На основі отриманого в рамках моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла розкриття в зоні нелінійних деформацій побудовано рівняння докритичного росту тріщин та наведено чисельний алгоритм їх розв'язання. Проаналізовано розв'язки рівнянь докритичного розвитку тріщин при визначенні тривалості початкового періоду росту, протягом якого розкриття в кінцях фізичної тріщини досягає критичного. Числові результати наведено у вигляді графіків і таблиці.

1. *Витвицкий П.М.* Полосы скольжения при растяжении тонких пластин с прямолинейными разрезами // Концентрация напряжений. – К.: Наук. думка, 1965. – С. 77 – 85.
2. *Каминский А.А.* Разрушение вязкоупругих тел с трещинами. – К.: Наук. думка, 1990. – 312 с.
3. *Камінський А.О., Селіванов М.Ф., Черноіван Ю.О.* Дослідження переміщення берегів двох колінеарних тріщин рівної довжини // Доп. НАН України – 2011. – № 11, – С. 70 – 75.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
5. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
6. *Adolfsson K., Enelund M., Olsson P.* On the fractional order model of viscoelasticity // Mech Time-Dep. Mat. – 2005. – 9. – P. 15 – 34.
7. *Chang Dh., Kotousov A.* A strip yield model for two collinear cracks // Engng. Fract. Mech. – 2012. – 90. – P. 121 – 128.
8. *Christensen R.M.* Theory of viscoelasticity. – NY: Dover Publications, 2003 – 369 p.
9. *Collins R. A., Cartwright D.J.* An analytical solution for two equal-length collinear strip yield cracks // Engng Fract. Mech. – 2001. – 68. – P. 915 – 924.
10. *Guz A.N., Guz I.A., Men'shikov A.V., Men'shikov V.A.* Three-Dimensional Problems in the Dynamic Fracture Mechanics of Materials with Interface Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 1. – P. 1 – 61.
11. *Hu Y., Huang Y, Zhong W.* Collinear periodic cracks in anisotropic bimetals // Int. J. Fract. – 1997. – 85. – P. 69 – 80.
12. *Kaminsky A.A., Kurchakov E.E.* Modeling a Crack with a Fracture Process Zone in a Nonlinear Elastic Body // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 5. – P. 552 – 562.
13. *Kaminsky A.A., Selivanov M.F., Chernoiivan Yu. A.* Subcritical Growth of a Mode III Crack in a Viscoelastic Composite Body // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 3. – P. 293 – 302.
14. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders // Fract. Calc. Appl. Anal. – 2007. – 10. – P. 111 – 121.
15. *Selivanov M.F., Chernoiivan Y.A.* A combined approach of the Laplace transform and Pade approximation solving viscoelasticity problems // Int. J. Solids and Struct. – 2007. – 44, N 1. – P. 66 – 76.

Поступила 27.04.2011

Утверждена в печать 03.12.2013