

С. В. Босаков

## КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛАСТИНКИ–ВКЛЮЧЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

*Белорусский национальный технический университет  
пр. Независимости, 65, 220027, Минск, Беларусь;  
e-mail: sevibo@yahoo.com*

**Abstract.** A solution of the contact problem for the flexible plate is given by the method of orthogonal polynomials. Also, the problem is solved on rotation of the plate, located at the notch of elastic half-space. The feature of solution is that the singularity in contact stresses at the plate ends is separated exactly. The findings can be used in analysis of anker plates of deep horizontal equivalent and batter members of ferroconcrete structures.

**Key words:** plate, contact problem, notch in elastic half-space, rigid stamp, singularity

### Введение.

Решение плоской контактной задачи для штампа, расположенного в щели упругой плоскости, впервые опубликовано в статье [13]. В [5] авторы получили приближенное решение этой задачи с помощью двойных сил, которые создают разрыв сплошности упругой плоскости. Методом ортогональных многочленов [12] решение получено в статьях [2, 3]. В монографии [10] рассматриваемая задача классифицируется как задача об отслоившемся включении и также приведено ее решение. Осесимметричная задача для круглой пластинки рассмотрена в работе [17]. В работе [4] решена задача для пластинки вблизи границы упругой полуплоскости. Отметим, что поведению трещины между двумя материалами посвящены статьи [16, 20], а учету зон контакта берегов трещины при динамической нагрузке – [17 и др.]. Решения статических задач о напряженном состоянии пластин и оболочек с учетом упругого основания рассмотрены в работах [10, 14, 19, 20].

В данной работе представлены решения двух контактных задач для пластинки-включения в упругом полупространстве, нагруженной центрально приложенными силой и моментом, причем для второй задачи решение получено методом Б.Н. Жемочкина [8].

1. Рассмотрим пластинку-включение конечной изгибной жесткости  $D$ , длиной  $2\ell$ , прижимаемую вертикальной сосредоточенной силой  $P$  к верхней границе упругого полупространства с постоянными  $E$  и  $\nu$  (рис. 1). Примем, что на контакте пластинки с плоскостью возникают только нормальные контактные напряжения. Известно [1], что вертикальные перемещения границы щели длиной  $2\ell$  в упругой плоскости от действия сосредоточенной силы  $P$  с точностью до произвольной постоянной определяются выражением

$$V(x) = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \ln \left| 1 - \frac{x}{\ell} \frac{t}{\ell} \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{\ell^2}} \right| \quad (1.1)$$

( $x$  – абсцисса точки границы щели, где определяется перемещение;  $t$  – абсцисса точки границы щели, где приложена сила). В (1.1) знак “плюс” относится к границе щели, к которой не приложена сила. На рис. 2 показан график относительных перемещений обеих границ щели от действия силы  $P$  при  $t = 0,7\ell$ , где  $P^* = P(1-\nu^2 / \pi E)$ .

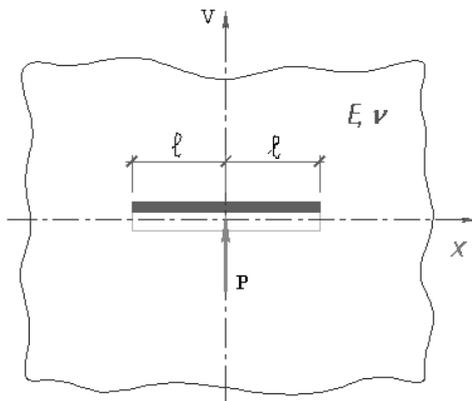


Рис. 1

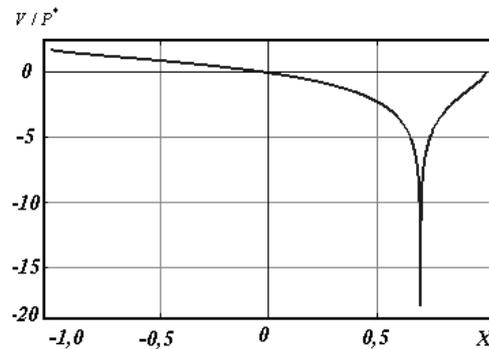


Рис. 2

Обозначим  $p(x)$  – искомый закон распределения контактных напряжений. Следуя в дальнейшем последовательности изложения П.И. Клубину [9], составим следующие разрешающие уравнения:

интегральное уравнение рассматриваемой контактной задачи для вертикальных перемещений верхней грани щели

$$V(x) = \int_{-\ell}^{\ell} p(t) K(x, t) dt ; \quad (1.2)$$

уравнения равновесия

$$\int_{-\ell}^{\ell} p(x) dx = P; \quad \int_{-\ell}^{\ell} x p(x) dx = 0 ; \quad (1.3)$$

дифференциальное уравнение изгиба пластинки

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} = -\frac{p(x)}{D} ; \quad (1.4)$$

граничные условия для изгибающего момента и поперечной силы на краях пластинки при  $x = \pm \ell$

$$M = -D \frac{d^2 Y}{dx^2} = 0; \quad Q = -D \frac{d^3 Y}{dx^3} = 0 ; \quad (1.5)$$

условие равенства прогибов пластинки  $Y(x)$  вертикальным перемещениям границы щели  $V(x)$

$$Y(x) = V(x) . \quad (1.6)$$

Определим неизвестный закон распределения контактных напряжений в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода с весом

$$p(x) = \frac{\sqrt{1-\frac{x}{\ell}} + \sqrt{1+\frac{x}{\ell}}}{\left(1-\frac{x^2}{\ell^2}\right)^{\frac{3}{4}}} \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m} T_{2m} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^2}}} \right), \quad (1.7)$$

где  $A_{2m}$  – неизвестные коэффициенты;  $T_{2m}(z)$  – полиномы Чебышева первого рода [6]. Заметим, что полиномы Чебышева  $T_{2m+1} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^2}}} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , имеют разрыв в производной при  $x = 0$  и поэтому отброшены.

Тогда второе уравнение равновесия (1.3) удовлетворяется тождественно ввиду четности принятых полиномов Чебышева, а первое дает (ввиду их ортогональности)

$$A_0 = \frac{P}{2\pi\sqrt{2}\ell}. \quad (1.8)$$

Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int_{-\ell}^{\ell} \frac{\sqrt{1-\frac{x}{\ell}} + \sqrt{1+\frac{x}{\ell}}}{\left(1-\frac{x^2}{\ell^2}\right)^{\frac{3}{4}}} T_{2m} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^2}}} \right) T_{2n} \left( \sqrt{1-\sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^2}}} \right) dx. \quad (1.9)$$

Сделаем в нем подстановку  $x = \ell \sin \eta$ . Получаем

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos \frac{\eta}{2}}{\sqrt{\cos \eta}} T_{2m} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) T_{2n} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) d\eta. \quad (1.10)$$

Если в (1.10) принять  $t = \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2}$ , то придем к известному из теории ортогональных многочленов свойству ортогональности полиномов Чебышева первого рода [6]

$$\int_{-1}^1 \frac{T_{2m}(t) T_{2n}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi \quad (m = n = 0);$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (m = n > 0); \quad 0 \quad (m \neq n), \quad (1.11)$$

но только с множителем  $2\sqrt{2}$ . Отметим, что (1.8) является точным решением для жесткого штампа [13].

Решение дифференциального уравнения (1.4) при условии (1.7) представим в следующей форме:

$$\frac{D}{\ell^4} Y(x) = A_0 F_0(x) + A_2 F_2(x) + A_4 F_4(x) + \dots + C_4 \frac{D}{\ell^4} + C_3 \frac{Dx}{\ell^4} + C_2 \frac{x^2}{\ell^4} + C_1 \frac{x^3}{\ell^4}; \quad (1.12)$$

$$F_0(x) = \frac{1}{72\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{l} \sqrt{2 \cos \eta} \left( 31 \cos \frac{\eta}{2} - 3 \cos \frac{3\eta}{2} - 11 \cos \frac{5\eta}{2} \right) + 57 \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) - \\ - 36 \cos 2\eta \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) + 6 \arcsin \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) (21 \sin \eta - 2 \sin 3\eta) \end{array} \right];$$

$$F_2(x) = \frac{1}{192} \left[ \begin{array}{l} 2\sqrt{\cos \eta} \left( -68 \cos \frac{\eta}{2} + 57 \cos \frac{3\eta}{2} + 8 \cos \frac{5\eta}{2} - 2 \cos \frac{7\eta}{2} \right) + \\ + 111\sqrt{2} \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) - \\ - 72\sqrt{2} \cos 2\eta \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) + 48\sqrt{2} \sin \eta \arcsin \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) \end{array} \right]; \quad (1.13)$$

$$F_4(x) = \frac{1}{32} \left[ \begin{aligned} & \frac{2}{15} \sqrt{\cos \eta} \left( -673 \cos \frac{\eta}{2} + 455 \cos \frac{3\eta}{2} + 79 \cos \frac{5\eta}{2} - 10 \cos \frac{7\eta}{2} + 2 \cos \frac{9\eta}{2} \right) + \\ & + 47\sqrt{2} \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) - \\ & - 32\sqrt{2} \cos 2\eta \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) - 2\sqrt{2} \sin \eta \arcsin \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) \end{aligned} \right];$$

$$\sin \eta = \frac{x}{\ell}; \quad \cos \eta = \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}; \quad \sin \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \right)}; \quad \cos \frac{\eta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \right)}.$$

Для выполнения граничных условий запишем выражения для поперечной силы и изгибающего момента

$$\begin{aligned} Q(x) &= P \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}} - \\ & - 4\ell A_2 \sqrt{\cos \eta} \sin \frac{\eta}{2} + 4\ell A_4 \sqrt{\cos \eta} \left( \sin \frac{3\eta}{2} - 2 \sin \frac{\eta}{2} \right) + \dots + C_1; \\ M(x) &= \frac{P\ell}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{\ell}} + \sqrt{1 + \frac{x}{\ell}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} + \frac{1}{2} \ln \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{\ell}} + \sqrt{1 + \frac{x}{\ell}}}{2} + \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{x}{\ell} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}} \right] + \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{2} \ell^2 A_2 \left[ 2\sqrt{\cos \eta} \left( -2 \cos \frac{\eta}{2} + \cos \frac{3\eta}{2} \right) + 3\sqrt{2} \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) \right] + \\ & + 4\ell^2 A_4 \left[ -\frac{1}{6} \sqrt{\cos \eta} \left( 10 \cos \frac{\eta}{2} - 3 \cos \frac{3\eta}{2} + \cos \frac{5\eta}{2} \right) + \sqrt{2} \ln \left( \sqrt{2} \cos \frac{\eta}{2} + \sqrt{\cos \eta} \right) \right] + \dots + C_1 x + C_2. \end{aligned}$$

Выполнение граничных условий (1.5) и условий симметрии при учете (1.14) и (1.12) дают

$$C_2 = C_3 = 0; \quad C_1 = -\frac{P}{2} \operatorname{sign} \frac{x}{\ell}. \quad (1.15)$$

Для практически важного случая жесткого штампа приводим формулы для поперечной силы и изгибающего момента в сечениях пластинки

$$\begin{aligned} Q(x) &= P \left( \frac{1}{\pi} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}} - \frac{1}{2} \right) \operatorname{sign} x; \\ M(x) &= \frac{P\ell}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{\ell}} + \sqrt{1 + \frac{x}{\ell}}}{2\sqrt{2}} \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} + \frac{1}{2} \ln \left( \sqrt{2} \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{\ell}} + \sqrt{1 + \frac{x}{\ell}}}{2} + \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{\ell^2}} \right) + \right. \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$+ \frac{x}{\ell} \arcsin \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{\ell^2}}} \Big] - \frac{P\ell}{2} \frac{x}{\ell}, \quad x \geq 0,$$

причем максимальный изгибающий момент в центре пластинки

$$M_{\max} = \frac{P\ell}{2\pi} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$$

превышает аналогичную величину для пластинки на упругой полуплоскости [5].

Подставим (1.7) в интегральное уравнение (1.2), сделаем подстановку  $x = \ell \sin \xi$ ;  $t = \ell \sin \eta$  и используем спектральное соотношение Г.Я. Попова [10, табл. А, ф-ла (7.5), с. 300] при  $\alpha = \pi/2$ )

$$\int_{\pi/2}^{\pi/2} \ln \left| \sin \frac{\xi - \eta}{2} \right| \frac{\cos \eta}{\sqrt{\cos \eta}} T_{2n} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\eta}{2} \right) d\eta = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \pi \ln 2, \quad n=0;$$

$$-\frac{\pi}{2n} T_{2n} \left( \sqrt{2} \sin \frac{\xi}{2} \right); \quad n=1, 2, \dots \quad (1.17)$$

В итоге получаем для перемещений верхнего берега щели равенство

$$V(x) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \ell \left[ -4\pi\sqrt{2} \ln 2 A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\sqrt{2}}{n} A_{2n} T_{2n} \left( \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2/\ell^2}} \right) \right]. \quad (1.18)$$

Так как в бесконечной изотропной однородной плоскости перемещения определяются с точностью до неопределенной постоянной [5, 12], которой является  $C_4$  в (1.12), приравниваем относительные перемещения верхнего берега щели и прогибы пластинки

$$V(x) - V(0) = Y(x) - Y(0). \quad (1.19)$$

Обе части полученного соотношения умножим на  $\frac{\sqrt{1-x/\ell} + \sqrt{1+x/\ell}}{(1-x^2/\ell^2)^{3/4}} \times T_{2n} \left( \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2/\ell^2}} \right) dx$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ , и проинтегрируем в пределах  $(-\ell, \ell)$ . Полученную систему линейных алгебраических уравнений решаем способом усечения [12].

Как показано в [9, 12], при применении способа ортогональных многочленов достаточно ограничиться несколькими первыми членами ряда (1.7). Поэтому для первых трех коэффициентов разложения (1.7) получим

$$A_2 = -\frac{0,1164\beta(2028,3539 + \beta)}{(42,6311 + \beta)(952,8538 + \beta)} \frac{P}{\ell}; \quad A_4 = \frac{(188,7709 + 0,6126\beta)\beta}{40621,2263 + \beta(995,4850 + \beta)} \frac{P}{\ell}, \quad (1.20)$$

где  $\beta = \frac{\pi E \ell^3}{(1-\nu^2)D}$  – показатель гибкости по М.И. Горбунову-Посадову [5]. Структура

получаемой усеченной системы такова, что при  $\beta = 0$  все  $A_{2m} = 0$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$ .

На рис. 3 показаны графики распределения контактных напряжений (*a*), поперечных сил (*b*) и изгибающих моментов (*в*) на полудлине пластинки при  $\beta = 0, 15$  по формулам (1.20).

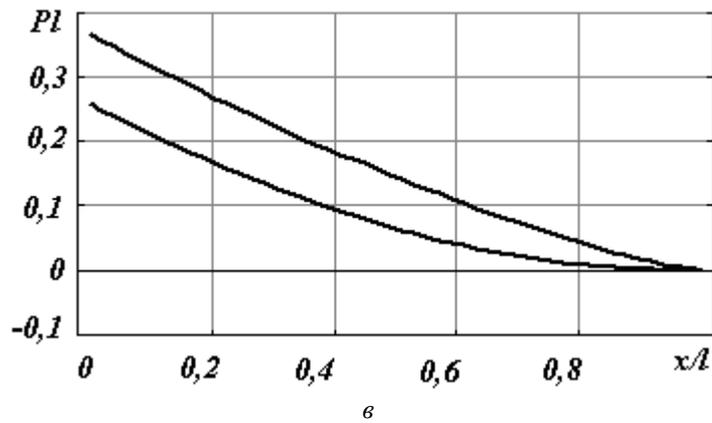
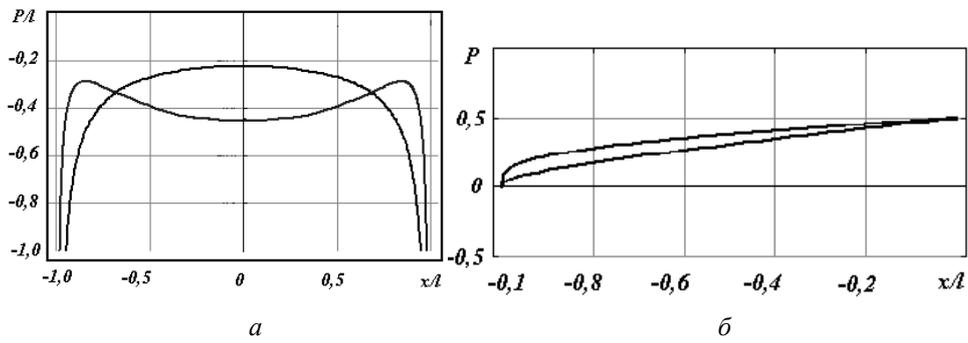


Рис. 3

2. Рассмотрим пластинку жесткостью  $D$  и шириной  $2\ell$ , расположенную в щели бесконечной плоскости с упругими постоянными  $E$  и  $\nu$ , под действием сосредоточенного момента  $M$  (рис. 4). Между пластинкой и плоскостью могут возникать только сжимающие нормальные напряжения.

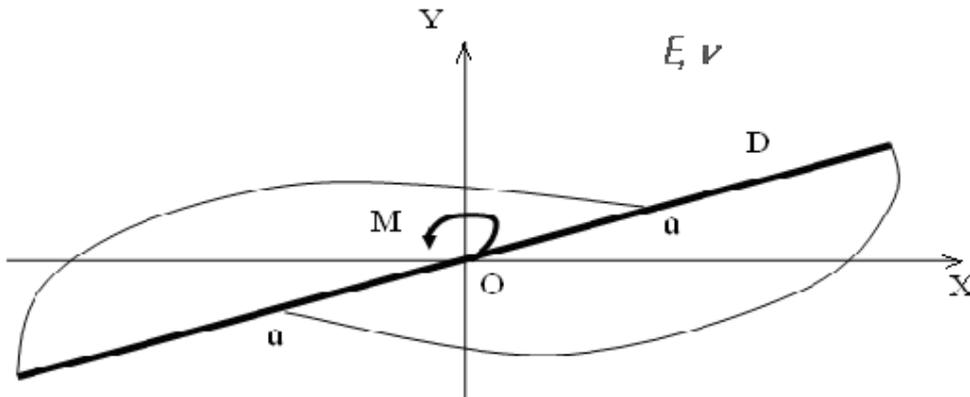


Рис. 4

Обозначим:  $a$  – граничная точка пластинки, в которой нарушается сплошной контакт плоскости и пластинки. Ставится цель – определить положение этой точки, распределение контактных напряжений между пластинкой и плоскостью и угол поворота пластинки  $\varphi$  от действия момента  $M$ .

Рассматриваемую задачу для жесткой плиты можно свести к интегральному уравнению относительно неизвестного закона распределения контактных напряжений  $p(\eta)$  между плитой и плоскостью

$$\frac{\pi E}{1-\nu^2} \varphi \xi = \int_{\alpha}^1 p(\eta) \left( \ln \left| 1 - \xi\eta - \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\eta^2} \right| - \ln \left| 1 + \xi\eta + \sqrt{1-\xi^2} \sqrt{1-\eta^2} \right| \right) d\eta$$

$$\left( \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \eta = \frac{t}{\ell}, \quad \alpha = \frac{a}{\ell}; \quad \alpha \leq \xi, \quad \eta \leq 1 \right), \quad (2.1)$$

где  $\varphi$  – неизвестный угол поворота жесткой плиты. В (2.1) в ядро интегрального уравнения следует добавить слагаемое, чтобы перемещения вычислить относительно начала координат.

К уравнению (2.1) необходимо добавить уравнение равновесия плиты

$$2 \int_{\alpha}^1 \xi p(\xi) d\xi = \frac{M}{\ell^2} \quad (2.2)$$

и условие контакта между плитой и плоскостью в точке  $a$

$$p(\alpha) = 0. \quad (2.3)$$

Для гибкой пластинки к этим уравнениям добавляются дифференциальное уравнение равновесия с краевыми условиями и уравнение равенства относительных перемещений границы щели прогибам пластинки.

Однако получить аналитическое решение интегрального уравнения (2.1) с выделением особенности, которая обусловлена наложением особенностей у края пластинки и вершины щели [12], с одновременным выполнением условий (2.2) и (2.3) автору не удалось. Поэтому рассматриваемая задача была решена методом Б.Н. Жемочкина [8]. С этой целью пластинка разбивалась на равные участки. На контакте пластинки и плоскости в середине каждого участка ставились жесткие связи, через которые осуществлялся контакт пластинки и границы щели (рис. 5). Принято, что усилие в связи вызывает равномерную эпюру давлений в пределах участка. Полученную статически неопределимую систему рассчитывали смешанным методом строительной механики [11], где за неизвестные принимались усилия в введенных связях, линейное и угловое перемещение введенного на краю пластинки защемления. Предварительно задавали положение точки раздела граничных условий (точки  $a$  на рис. 5). Если в результате решения усилия в некоторых связях на контакте пластинки и границы щели получены растягивающие, задавалось новое положение точки  $a$  и производился новый расчет. Этот итерационный процесс заканчивался тогда, когда усилия во всех связях получены сжимающие, причем в крайней к середине пластинки связи, близкое к нулю.

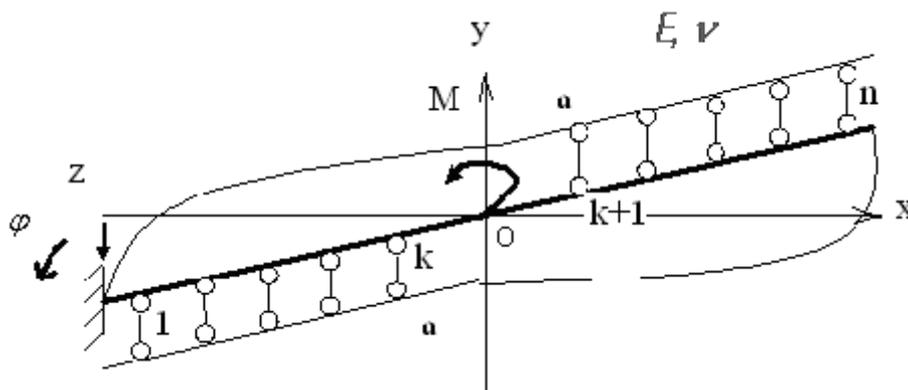


Рис. 5

В матричной форме система уравнений метода Б.Н. Жемочкина для итерационного решения поставленной задачи имеет следующий вид:

$$[\delta] \overset{\rightarrow}{X} + \overset{\rightarrow}{\Delta} = 0; \quad (2.4)$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & -b_1 & -1 \\ d_{21} & d_{22} & b_2 & 1 \\ b_1 & -b_2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \overset{\rightarrow}{X^T} = [X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n, \frac{\pi E \ell^2}{1-\nu^2} \varphi, \frac{\pi E \ell}{1-\nu^2} z];$$

$$\overset{\rightarrow}{\Delta^T} = \left[ \Delta_1, \dots, \Delta_k, \Delta_{k+1}, \dots, \Delta_n, -\frac{M}{\ell}, 0 \right];$$

$$d_{11} = \begin{bmatrix} F_{1,1}^d + \beta y_{1,1} & \dots & F_{1,k}^d + \beta y_{1,1} \\ \dots & & \dots \\ F_{k,1}^d + \beta y_{k,1} & \dots & F_{k,k}^d + \beta y_{k,k} \end{bmatrix}; \quad d_{22} = \begin{bmatrix} F_{k+1,k+1}^d + \beta y_{k+1,k+2} & \dots & F_{k+1,n}^d + \beta y_{k+1,n} \\ \dots & & \dots \\ F_{n,k+1}^d + \beta y_{n,k+1} & \dots & F_{n,n}^d + \beta y_{n,n} \end{bmatrix};$$

$$d_{12} = \begin{bmatrix} F_{1,k+1}^u - \beta y_{1,k+1} & \dots & F_{1,n}^u - \beta y_{1,n} \\ \dots & & \dots \\ F_{k,k+1}^u - \beta y_{k,k+1} & \dots & F_{k,n}^u - \beta y_{k,n} \end{bmatrix}; \quad d_{21} = \begin{bmatrix} F_{k+1,1}^u - \beta y_{k+1,1} & \dots & F_{k+1,n}^u - \beta y_{k+1,k} \\ \dots & & \dots \\ F_{n,1}^u - \beta y_{n,1} & \dots & F_{n,k}^u - \beta y_{n,k} \end{bmatrix};$$

$$b_1 = \left[ -1 + \frac{c}{2\ell}, -1 + 3\frac{c}{2\ell}, \dots, -1 + \frac{2k+1}{2\ell}c \right]; \quad b_2 = \left[ 1 - \frac{2k-1}{2\ell}c, 1 - \frac{2k+1}{2\ell}c, \dots, 1 - \frac{c}{2\ell} \right];$$

$$\Delta_i = \frac{Mc}{2\ell} \frac{a_i^2}{\ell^2} \beta \quad (i=1, \dots, k); \quad \Delta_i = -\frac{Mc}{2\ell} \left( 2\frac{a_i}{\ell} - 1 \right) \beta \quad (i=k+1, \dots, n),$$

$$y_{i,k} = \frac{a_i^2}{6\ell^2} \left( 3\frac{a_k}{\ell} - \frac{a_i}{\ell} \right), \quad a_k > a_i; \quad y_{i,k} = \frac{a_k^2}{6\ell^2} \left( 3\frac{a_i}{\ell} - \frac{a_k}{\ell} \right), \quad a_i > a_k,$$

где  $\beta = \frac{E\ell^3}{(1-\nu^2)D}$  – показатель гибкости по М.И. Горбунову-Посадову [5];  $a_i$  – расстояние от защемления до связи с номером  $i$ ;

$F_{i,k}^d$  – безразмерная функция для определения перемещений точки  $i$  грани щели, в точке  $k$  которой приложена равномерно распределенная по длине участка  $c$  единичная сила;  $F_{i,k}^u$  – безразмерная функция для определения перемещений точки  $i$  грани щели, когда в точке  $k$  противоположной грани щели приложена равномерно распределенная по длине участка  $c$  единичная сила. Выражения для безразмерных функций приведены в статье автора [1].

После определения положения точки  $a$  раздела граничных условий определяли контактные напряжения для каждого участка и форму щели, образованную в плоскости изгибаемой моментом пластинкой. При определении формы щели использованы выражения для безразмерных функций.

Следует отметить, что система разрешающих уравнений для определения неизвестных имеет своеобразную структуру, анализ которой позволяет сделать ряд выводов, ранее отмеченных в работах [7, 10].

Эти выводы следующие: 1) угол поворота пластинки  $\varphi$  линейно зависит от момента  $M$ ; 2) усилия в связях Б.Н. Жемочкина линейно зависят от  $\varphi$  и, соответственно, от  $M$ ; 3) положение точки раздела граничных условий  $a$  не зависит от  $\varphi$  и  $M$ .

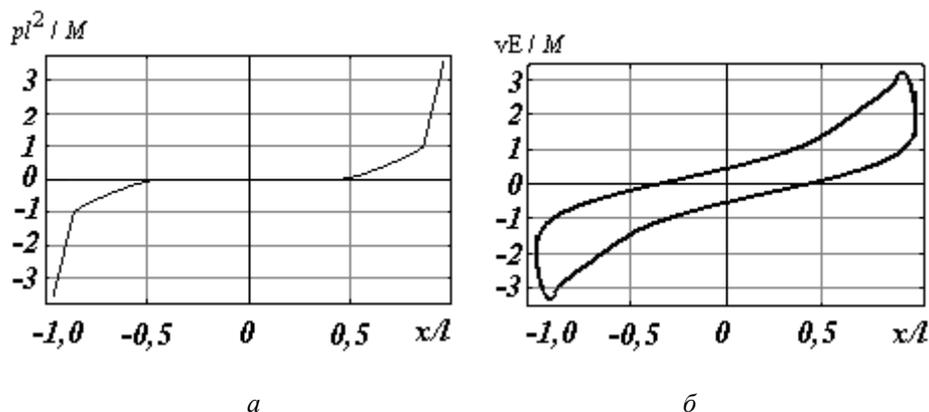


Рис. 6

На рис. 6 показаны графики распределения контактных напряжений (а) и форма образовавшейся при этом щели (б) для пластинки с  $\beta = 10$ .



Рис. 7

На рис. 7 изображена зависимость положения точки раздела граничных условий от показателя гибкости  $\beta$ . При выполнении расчетов пластинка разбивалась на 20 участков Б.Н. Жемочкина.

Для жесткой плиты ( $\beta = 0$ ) получено:  $a = 0,35\ell$ ;  $\varphi = 1,058 \frac{M(1-\nu^2)}{E \ell^2}$ .

#### Выводы.

На основании спектрального соотношения Г.Я. Попова получено решение контактной задачи об отслоившем гибком включении в упругой плоскости. При этом точно выделена особенность в контактных напряжениях у края пластинки.

Способом Б.Н. Жемочкина получено численное решение для гибкой пластинки, расположенной в щели упругой плоскости и нагруженной сосредоточенным моментом. Для жесткой плиты впервые приведены зависимости между моментом и углом поворота плиты.

РЕЗЮМЕ. Наведено розв'язок способом ортогональних многочленів контактної задачі для гнучкої пластинки-включення в пружному півпросторі; при цьому точно виділяється особливість у контактних напруженнях біля країв пластинки. Також розв'язано задачу про обертання пластинки. Отримані результати можуть бути використані для розрахунків анкерних плит глибокого заложення і закладних деталей залізобетонних конструкцій.

1. *Босаков С.В.* Расчет заглубленных анкерных плит конечной жесткости // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1977. – **6**. – С. 23 – 24.
2. *Босаков С.В.* Решение одной контактной задачи для плоскости с щелью // Прикл. механика. – 1977. – **13**, №7. – С. 127 – 129.
3. *Босаков С.В.* Расчет заглубленных анкерных плит конечной жесткости // Прикл. механика. – 1980. – **16**, №3. – С. 81 – 87.
4. *Босаков С.В.* Плоская задача расчета анкерных плит неглубокого заложения // Прикл. механика. – 1986. – **22**, №1. – С. 45 – 51.
5. *Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И.* Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 678с.
6. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1963. – 1100с.
7. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509с.
8. *Жемочкин Б.Н., Синицын А.П.* Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1962. – 239с.
9. *Клубин П.И.* Расчет балочных и круглых плит на упругом основании // Инж. сб. – 1952. – №12. – С. 95 – 135.
10. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 341с.
11. *Рабинович И.М.* Курс строительной механики. Ч.2. – М.: Стройиздат, 1954. – 543с.
12. *Развитие* теории контактных задач в СССР / Под ред. Л.А. Галина. – М.: Наука, 1976. – 493с.
13. *Фотиева Н.Н., Лыткин В.А.* К расчету анкерных плит глубокого заложения // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1969. – №5. – С. 8 – 10.
14. *Vespalova E.I., Urusova G.P.* Contact Interaction between Pressed Laminated Shells of Revolution and a Flat Foundation // Int. Appl. Mech. – 2006 – **42**, N10 – P. 1137 – 1144.
15. *Bosakov S.V.* An Approach to the Contact Problem for a Circular Punch on an Elastic Foundation // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N4. – P. 413 – 418.
16. *Erdogan F.* Stress Distribution in Bodner Dissimilar Materials with Cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**. – P. 403 – 410.
17. *Guz A.N., Zozulia V.V.* Elastodynamic Unilateral Contact Problems with Friction for Bodies with Cracks // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N8. – P. 895 – 932.
18. *Rice J.R., Sih G.C.* Plane Problem of Cracks in Dissimilar Media // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**. – P. 418 – 423.
19. *Yarovaya A.V.* Thermoelastic Bending of a Sandwich Plate on a Deformable Foundation // Int. Appl. Mech. – 2006 – **42**, N2 – P. 203 – 213.
20. *Zhukovskii I. N.* Contact Problem for a Plate Situated in the Crack an Infinite Body // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N8. – P. 895 – 932.

Поступила 10.03.2011

Утверждена в печать 26.06.2013