

Е. В. Алтухов, М. В. Фоменко

УПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ ТОРЦАМИ

*Донецкий национальный университет, ул. Университетская, 24,
83001, г. Донецк, Украина; e-mail: e.altukhov@donnu.edu.ua*

Abstract. The three-dimensional problem about the steady-state vibrations of three-layered isotropic plates with flat faces covered by a diaphragm is considered. Conditions of ideal contact are satisfied on interface of layers. The homogeneous solutions of equations system of motion in the displacements are got. The asymptotic analysis and computational investigations of dispersive equations are carried out. Diagrams of spectral curves, change curves of phase and group velocities are represented.

Key words: three-layered plate, steady-state vibrations, method of homogeneous solutions, dispersion spectra, cut-off frequencies, phase and group velocities.

Введение.

Поперечно-неоднородные, в том числе слоистые, пластины часто используют в качестве деталей машин и механизмов, элементов современных конструкций. Модели многослойных оснований применяют, например, в механике композитов и горных пород, геофизике и сейсмологии. Слоистые покрытия защищают конструкции от тепловых воздействий и коррозии, демпфируют колебания, обеспечивают звукоизоляцию. Широкое применение неоднородных пластин требует создания новых и развитие известных методов их расчета. Анализ развития теорий поперечно-неоднородных упругих пластин, подходов и методов решения конкретных задач отражен в обзорах [7 – 9, 11, 16 и др.] и монографиях, например, [4, 5 и др.]. Современные публикации свидетельствуют о том, что большинство научных результатов получено с использованием приближенных теорий. Поэтому актуальным для науки и практических приложений является изучение напряженного состояния и волновых полей в слоистых пластинах на основе уравнений трехмерной теории упругости.

В пространственных задачах статики изотропного однородного тела получены общие решения (Папковича П.Ф. – Нейбера Г., Галеркина Б.Г., Лява А. и другие) системы уравнений равновесия и компоненты вектора перемещений выражены через гармонические и бигармонические функции. Аналогично в задачах динамики перемещения представлены волновыми функциями. Указанные общие решения с привлечением известных методов математической физики могут быть использованы для исследования напряженного состояния в слоистых пластинах произвольной толщины. Для функционально градиентных материалов, когда упругие параметры являются кусочно-непрерывными функциями поперечной координаты, невозможно использование известных общих решений для однородных сред. В статье [12] показана процедура обобщения общих решений Лява и Хойля – Янгдала в неоднородной теории упругости. Основные результаты научных исследований и актуальность теорий функционально градиентных материалов отражены в обзорной статье [7]. Некоторые аспекты при решении динамических задач для пластин с различной структурой изложены в работах [6, 10, 13 – 15, 17 – 19].

Для решения трехмерных задач статики и динамики неоднородных пластин важное значение имеют однородные решения [1, 2, 4, 20], предложенные в работе [3]. Впервые в статье [20] полуобратным методом получена полная система однородных решений уравнений равновесия в перемещениях для трехслойной плиты симметричного строения. Исследованию свойств однородных решений неоднородных плит посвящены работа [4].

В настоящей работе на основе метода однородных решений в трехмерной постановке рассмотрена задача о гармонических колебаниях трехслойных пластин, плоские грани которых покрыты диафрагмой.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим трехслойную пластину толщиной $2h$ симметричного строения относительно срединной плоскости. Внешние одинаковые и внутренний слой пластины находятся в условиях идеального контакта и являются изотропными. Плоские грани пластины покрыты диафрагмой, а колебания вызваны внешними гармонически изменяющимися во времени усилиями, приложенными к боковой поверхности. Отнесем пластину к безразмерным прямоугольным координатам x_1, x_2, x_3 , причем срединная плоскость пластины совпадает с координатной плоскостью Ox_1x_2 . Величины, относящиеся к внешним слоям, имеют индекс (1), к внутреннему – индекс (2). Введем обозначения: h_1 – толщина внешних одинаковых слоев; $2h_2$ – толщина внутреннего слоя; физико-механические характеристики материалов слоев – $\tilde{G}_m, \rho_m, \nu_m$ ($m=1,2$), где \tilde{G}_m – модуль сдвига; ρ_m – плотность материала; ν_m – коэффициент Пуассона; m – номер слоя.

Введем безразмерные величины и координаты: $x_1 = \tilde{x}_1/R$; $x_2 = \tilde{x}_2/R$; $x_3 = \tilde{x}_3/h = \tilde{x}_3/(\lambda R)$; $\lambda = h/R$; $h = h_1 + h_2$; $\lambda_1 = h_1/h$; $\lambda_2 = h_2/h$; $u_{i(m)} = \tilde{u}_{i(m)}/R$; $\sigma_{ij(m)} = \tilde{\sigma}_{ij(m)}/(2\tilde{G}_2)$; $i, j = \overline{1,3}$; $m = 1, 2$; $G_m = \tilde{G}_m/\tilde{G}_2$; $G_1 = G$.

Построение однородных решений данной задачи сводится к интегрированию известных систем уравнений движения для каждого слоя

$$\begin{aligned} \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{j(m)} + (D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2) u_{j(m)} + \nu_{0(m)} \partial_j \theta_m &= 0 \quad (j=1, 2); \\ \lambda^{-2} \partial_3^2 u_{3(m)} + (D^2 + \Omega_m^2 / \lambda^2) u_{3(m)} + \lambda^{-1} \nu_{0(m)} \partial_3 \theta_m &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

с учетом краевых условий

$$\begin{aligned} u_{j(1)}(x_1, x_2, 1) = 0, \quad \sigma_{33(1)}(x_1, x_2, 1) = 0 \quad (j=1, 2); \\ u_{i(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) = u_{i(2)}(x_1, x_2, \lambda_2); \\ \sigma_{i3(1)}(x_1, x_2, \lambda_2) = \sigma_{i3(2)}(x_1, x_2, \lambda_2) \quad (i = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначения здесь и ниже соответствуют принятым в работах [1, 2].

2. Однородные решения задачи.

Значения векторов перемещений представим суммой вихревого и потенциального состояний, т.е.

$$u_{i(m)}(x_1, x_2, x_3) = u_{i(m)B}(x_1, x_2, x_3) + u_{i(m)П}(x_1, x_2, x_3).$$

Вихревое решение имеет вид

$$\begin{aligned}
u_{1(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_2 B_k(x_1, x_2); \\
u_{2(m)B}(x_1, x_2, x_3) &= -\sum_{k=1}^{\infty} p_{(m)k}(x_3) \partial_1 B_k(x_1, x_2); \quad u_{3(m)B}(x_1, x_2, x_3) = 0 \\
\left(\begin{aligned} p_{(1)k}^+(x_3) &= \cos l_{(2)k}^+ \lambda_2 \cos l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3) + \frac{1}{G} \frac{l_{(2)k}^+}{l_{(1)k}^+} \sin l_{(2)k}^+ \lambda_2 \sin l_{(1)k}^+ (\lambda_2 - x_3); \\ p_{(1)k}^-(x_3) &= \frac{1}{l_{(2)k}^-} \sin l_{(2)k}^- \lambda_2 \cos l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3) - \frac{1}{G l_{(1)k}^-} \cos l_{(2)k}^- \lambda_2 \sin l_{(1)k}^- (\lambda_2 - x_3); \\ p_{(2)k}^+(x_3) &= \cos l_{(2)k}^+ x_3, \quad p_{(2)k}^-(x_3) = \frac{1}{l_{(2)k}^-} \sin l_{(2)k}^- x_3, \quad (l_{(m)k}^{\pm})^2 = \Omega_m^2 + (\delta_k^{\pm})^2; \\ D^2 B_k(x_1, x_2) &= (\delta_k^{\pm} / \lambda)^2 B_k(x_1, x_2) \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

Счетные множества собственных значений δ_k^+ , δ_k^- , соответственно, для симметричных и кососимметричных колебаний определяются из дисперсионных уравнений

$$\begin{aligned}
l_{(2)k}^+ \sin l_{(1)k}^+ \lambda_1 \sin l_{(2)k}^+ \lambda_2 - G l_{(1)k}^+ \cos l_{(1)k}^+ \lambda_1 \cos l_{(2)k}^+ \lambda_2 &= 0; \\
l_{(2)k}^- \sin l_{(1)k}^- \lambda_1 \cos l_{(2)k}^- \lambda_2 + G l_{(1)k}^- \cos l_{(1)k}^- \lambda_1 \sin l_{(2)k}^- \lambda_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Потенциальное решение введем с помощью соотношений

$$\begin{aligned}
u_{j(m)II}(x_1, x_2, x_3) &= n_{(m)}(x_3) \partial_j C(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2); \\
u_{3(m)II}(x_1, x_2, x_3) &= q_{(m)}(x_3) C(x_1, x_2). \tag{3}
\end{aligned}$$

Из выражений (1) – (3) следует, что функция $C(x_1, x_2)$ удовлетворяет уравнению $D^2 C(x_1, x_2) - (\gamma / \lambda)^2 C(x_1, x_2) = 0$, а для неизвестных функций $n_{(m)}(x_3)$, $q_{(m)}(x_3)$ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{aligned}
n_{(m)}'' + \left[\Omega_m^2 + \gamma^2 (1 + \nu_{0(m)}) \right] n_{(m)} + \lambda \nu_{0(m)} q_{(m)}' &= 0; \\
q_{(m)}'' + \frac{\Omega_m^2 + \gamma^2}{1 + \nu_{0(m)}} q_{(m)} + \frac{\gamma^2 \nu_{0(m)}}{\lambda (1 + \nu_{0(m)})} n_{(m)}' &= 0; \tag{4}
\end{aligned}$$

$$n_{(1)}(1) = 0; \quad \lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(1) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(1) = 0; \quad n_{(1)}(\lambda_2) = n_{(2)}(\lambda_2);$$

$$q_{(1)}(\lambda_2) = q_{(2)}(\lambda_2); \quad G \left[q_{(1)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(1)}'(\lambda_2) \right] = q_{(2)}(\lambda_2) + \lambda^{-1} n_{(2)}'(\lambda_2);$$

$$\begin{aligned}
G \left[\lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(1)} - 1) n_{(1)}(\lambda_2) + (\nu_{0(1)} + 1) q_{(1)}'(\lambda_2) \right] &= \\
= \lambda^{-1} \gamma^2 (\nu_{0(2)} - 1) n_{(2)}(\lambda_2) + (\nu_{0(2)} + 1) q_{(2)}'(\lambda_2), \tag{5}
\end{aligned}$$

где γ – параметр разделения переменных.

Общим решением системы (4) для симметричных и кососимметричных колебаний являются функции

$$\begin{aligned}
n_1^\pm(x_3) &= H_1^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_2^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + H_3^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + H_4^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3; \\
q_1^\pm(x_3) &= Q_1^\pm \sin \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_2^\pm \cos \gamma_{1(1)}^\pm x_3 + Q_3^\pm \sin \gamma_{2(1)}^\pm x_3 + Q_4^\pm \cos \gamma_{2(1)}^\pm x_3; \\
n_2^\pm(x_3) &= H_5^\pm \cos \gamma_{1(2)}^\pm x_3 + H_6^\pm \cos \gamma_{2(2)}^\pm x_3, \quad n_2^-(x_3) = H_5^- \sin \gamma_{1(2)}^- x_3 + H_6^- \sin \gamma_{2(2)}^- x_3; \\
q_2^\pm(x_3) &= Q_5^\pm \sin \gamma_{1(2)}^\pm x_3 + Q_6^\pm \sin \gamma_{2(2)}^\pm x_3, \quad q_2^-(x_3) = Q_5^- \cos \gamma_{1(2)}^- x_3 + Q_6^- \cos \gamma_{2(2)}^- x_3 \quad (6) \\
\left[\left(\gamma_{1(m)}^\pm \right)^2 = k_m^2 \Omega_m^2 + \left(\gamma^\pm \right)^2, \left(\gamma_{2(m)}^\pm \right)^2 = \Omega_m^2 + \left(\gamma^\pm \right)^2, Q_i^\pm = \lambda^{-1} a_i^\pm H_i^\pm \quad (1, 6); \right. \\
a_1^\pm &= -\gamma_{1(1)}^\pm, \quad a_2^\pm = \gamma_{1(1)}^\pm, \quad a_3^\pm = -\left(\gamma^\pm \right)^2 / \gamma_{2(1)}^\pm, \quad a_4^\pm = \left(\gamma^\pm \right)^2 / \gamma_{2(1)}^\pm, \quad a_5^\pm = \mp \gamma_{1(2)}^\pm; \\
a_6^\pm &= \mp \left(\gamma^\pm \right)^2 / \gamma_{2(2)}^\pm, \quad k_m^2 = (1 - 2\nu_m) / (2 - 2\nu_m) \left. \right].
\end{aligned}$$

Из соотношений (5), (6) получаем уравнения для определения собственных значений γ

$$\begin{aligned}
F^+(\gamma, \Omega) &\equiv G^2 \left(\zeta_1^2 S_{11} C_{21} - \tau_1 C_{11} S_{21} \right) \left(t_2 S_{12} C_{22} - \gamma^2 C_{12} S_{22} \right) + \\
&+ 2G\gamma^2 \left(\zeta_1 S_{11} C_{21} - 2t_1 C_{11} S_{21} \right) \left(\zeta_2 C_{12} S_{22} - 2t_2 S_{12} C_{22} \right) + \\
&+ \left(t_1 C_{11} S_{21} - \gamma^2 S_{11} C_{21} \right) \left(\zeta_2^2 C_{12} S_{22} - \tau_2 S_{12} C_{22} \right) - \\
&- G\Omega_1^2 \Omega_2^2 \left(\gamma_{1(1)} \gamma_{2(2)} C_{11} C_{21} C_{12} C_{22} + \gamma_{2(1)} \gamma_{1(2)} S_{11} S_{21} S_{12} S_{22} \right) = 0; \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^-(\gamma, \Omega) &\equiv G^2 \left(\zeta_1^2 S_{11} C_{21} - \tau_1 C_{11} S_{21} \right) \left(t_2 C_{12} S_{22} - \gamma^2 S_{12} C_{22} \right) + \\
&+ 2G\gamma^2 \left(\zeta_1 S_{11} C_{21} - 2t_1 C_{11} S_{21} \right) \left(\zeta_2 S_{12} C_{22} - 2t_2 C_{12} S_{22} \right) + \\
&+ \left(t_1 C_{11} S_{21} - \gamma^2 S_{11} C_{21} \right) \left(\zeta_2^2 S_{12} C_{22} - \tau_2 C_{12} S_{22} \right) + \\
&+ G\Omega_1^2 \Omega_2^2 \left(\gamma_{1(1)} \gamma_{2(2)} C_{11} C_{21} S_{12} S_{22} + \gamma_{2(1)} \gamma_{1(2)} S_{11} S_{21} C_{12} C_{22} \right) = 0 \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\left(\tau_m = 4\gamma^2 \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)}, \quad t_m = \gamma_{1(m)} \gamma_{2(m)}, \quad \zeta_m = \gamma^2 + \gamma_{2(m)}^2; \right)$$

$$S_{jm} = \sin \gamma_{j(m)} \lambda_m, \quad C_{jm} = \cos \gamma_{j(m)} \lambda_m \quad (j, m = 1, 2).$$

Важной характеристикой колебаний являются частоты запираия. Для их определения полагаем в уравнениях (7), (8) $\gamma = 0$ и получаем следующие трансцендентные уравнения:

$$F^+(0, \Omega) \equiv (Gk_2\Omega_1s_{11}s_{12} - k_1\Omega_2c_{11}c_{12})(G\Omega_1c_{21}c_{22} - \Omega_2s_{21}s_{22}) = 0; \quad (9)$$

$$F^-(0, \Omega) \equiv (Gk_2\Omega_1s_{11}c_{12} + k_1\Omega_2c_{11}s_{12})(G\Omega_1c_{21}s_{22} + \Omega_2s_{21}c_{22}) = 0 \quad (10)$$

$$(s_{1m} = \sin(k_m\Omega_m\lambda_m), s_{2m} = \sin(\Omega_m\lambda_m), c_{1m} = \cos(k_m\Omega_m\lambda_m), c_{2m} = \cos(\Omega_m\lambda_m)).$$

Каждое из уравнений (9), (10) определяет по две независимые серии частот записания, причем частоты первой серии не зависят от значений коэффициентов Пуассона ν_1, ν_2 в отличие от частот второго семейства.

3. Асимптотический анализ уравнений и предельные соотношения.

Для определения корней дисперсионных уравнений (7), (8) важным является поиск точек их пересечения с плоскостью $\Omega = 0$. Предельный переход к задаче статики осуществлен с помощью разложений функций $F^\pm(\gamma, \Omega)$, порождающих дисперсионные уравнения, в ряд Тейлора в окрестности точки $\Omega = 0$. Если $\Omega \rightarrow 0$, тогда уравнения (7), (8) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} F^+(\gamma, 0) &\equiv G^2(\sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)((3 - 4\nu_2)\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ 2G(((1 - 2\nu_1)\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)((1 - 2\nu_2)\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) - \\ &- 4(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(\cos 2\gamma\lambda_1 \cos 2\gamma\lambda_2 + 1)) + \\ &+ ((3 - 4\nu_1)\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) = 0; \\ F^-(\gamma, 0) &\equiv G^2(\sin 2\gamma\lambda_1 - 2\gamma\lambda_1)((3 - 4\nu_2)\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) + \\ &+ 2G(((1 - 2\nu_1)\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)((1 - 2\nu_2)\sin 2\gamma\lambda_2 + 2\gamma\lambda_2) - \\ &- 4(1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(\cos 2\gamma\lambda_1 \cos 2\gamma\lambda_2 - 1)) + \\ &+ ((3 - 4\nu_1)\sin 2\gamma\lambda_1 + 2\gamma\lambda_1)(\sin 2\gamma\lambda_2 - 2\gamma\lambda_2) = 0. \end{aligned}$$

Для кососимметричных колебаний в особом положении оказывается первая ветвь, проходящая через начало координат $\gamma = 0, \Omega = 0$. Соответствующая дисперсная мода оказывается распространяющейся при любой частоте. Для анализа скоростей этой моды при малых частотах в окрестности начала координат можно существенно упростить дисперсионное уравнение (8) за счет малости величин γ, Ω . При этом для безразмерной фазовой скорости $v_p = c_p / c_{S2}$ имеем

$$v_p(0) = \sqrt{G/((G\lambda_2 + \lambda_1)(\eta\lambda_1 + \lambda_2))}.$$

Из данной формулы следует, что в низкочастотном диапазоне кососимметричная волна является бездисперсной.

При $\gamma \rightarrow \infty$ из (7), (8) для первой распространяющейся моды получаем алгебраическое уравнение

$$\begin{aligned}
& G\left((s_1^2 - 1)(s_2^2 - 1)(s_1 r_2 + r_1 s_2) + 2(1 + s_1^2 - 2r_1 s_1)(1 + s_2^2 - 2r_2 s_2)\right) + \\
& + G^2\left(\left(1 + s_1^2\right)^2 - 4r_1 s_1\right)(r_2 s_2 - 1) + (r_1 s_1 - 1)\left(\left(1 + s_2^2\right)^2 - 4r_2 s_2\right) = 0 \quad (11) \\
& \left(r_m = \sqrt{1 - c^2 / c_{Pm}^2}, s_m = \sqrt{1 - c^2 / c_{Sm}^2}\right).
\end{aligned}$$

Уравнение (11) приводится к известному для определения скорости c_{St} волны Стоунли

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{c^2}{c_{S2}^2} - G \frac{c^2}{c_{S1}^2} - 2(1 - G)\right)^2 - G \frac{c^4}{c_{S1}^2 c_{S2}^2} (r_2 s_1 + r_1 s_2) - r_1 s_1 \left(\frac{c^2}{c_{S2}^2} - 2(1 - G)\right)^2 - \\
& - r_2 s_2 \left(G \frac{c^2}{c_{S1}^2} + 2(1 - G)\right)^2 + 4(1 - G)^2 r_1 r_2 s_1 s_2 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, для обоих случаев симметрии фазовая скорость первой распространяющейся моды имеет в коротковолновом высокочастотном пределе значение скорости поверхностной волны Стоунли. Для остальных ветвей при $\gamma \rightarrow \infty$ получаем $c = \min\{c_{S1}, c_{S2}\}$.

Если $G \rightarrow 0$ (внешний слой – мягкий), тогда из уравнений (7) и (8) следует

$$\begin{aligned}
& \left(\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1 - \gamma^2 \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1\right) (\sin 2\gamma \lambda_2 + 2\gamma \lambda_2) = 0; \\
& \left(\gamma_{1(1)} \gamma_{2(1)} \cos \gamma_{1(1)} \lambda_1 \sin \gamma_{2(1)} \lambda_1 - \gamma^2 \sin \gamma_{1(1)} \lambda_1 \cos \gamma_{2(1)} \lambda_1\right) (\sin 2\gamma \lambda_2 - 2\gamma \lambda_2) = 0.
\end{aligned}$$

В результате каждый дисперсионный спектр состоит из двух. Один соответствует колебаниям внешних слоев, а другой – равновесию внутреннего слоя.

При $G \rightarrow \infty$ (внутренний слой – мягкий) из уравнений (7) и (8) имеем

$$\begin{aligned}
& (\sin 2\gamma \lambda_1 - 2\gamma \lambda_1) \left(\gamma_{1(2)} \gamma_{2(2)} \sin \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2 - \gamma^2 \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \sin \gamma_{2(2)} \lambda_2\right) = 0; \\
& (\sin 2\gamma \lambda_1 - 2\gamma \lambda_1) \left(\gamma_{1(2)} \gamma_{2(2)} \cos \gamma_{1(2)} \lambda_2 \sin \gamma_{2(2)} \lambda_2 - \gamma^2 \sin \gamma_{1(2)} \lambda_2 \cos \gamma_{2(2)} \lambda_2\right) = 0.
\end{aligned}$$

В случае выполнения одного из трех условий $\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$ или $G = 1$, $\eta = 1$, $\nu_1 = \nu_2$ (однослойная пластина) дисперсионные уравнения (7) и (8) сводятся к виду

$$F^+(\gamma, \Omega) \equiv \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0, \quad F^-(\gamma, \Omega) \equiv \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 = 0.$$

4. Анализ результатов численных исследований.

Пусть внешние слои пластины изготовлены из алюминия и характеризуются параметрами среды ($\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\tilde{G}_1 = 2,61 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu_1 = 0,35$; $c_{S1} = 3110$ м/с), а внутренний – из вольфрама ($\rho_2 = 18,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\tilde{G}_2 = 15,3 \cdot 10^{10}$ Н/м²; $\nu_2 = 0,29$; $c_{S2} = 2860$ м/с). Расчеты проведены для варианта $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$. При этом входящие в уравнения (7), (8) частоты Ω_1 , Ω_2 , Ω связаны соотношениями $\Omega_1 = \Omega c_{S2} / c_{S1}$, $\Omega_2 = \Omega$.

Трансцендентные уравнения (7) и (8) определяют счетное множество спектральных кривых – зависимостей частоты Ω от параметра γ . На рис. 1 представлены полные дисперсионные спектры симметричных (а) и кососимметричных (б) колебаний.

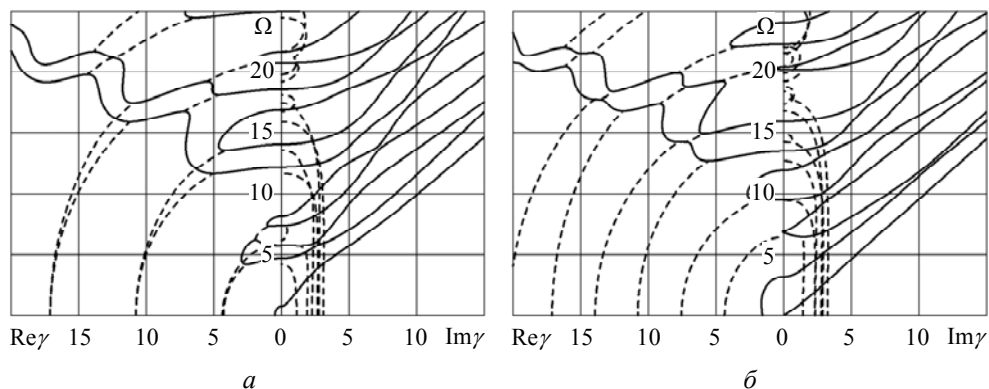


Рис. 1

На диаграммах сплошные линии соответствуют вещественным и чисто мнимым корням, штриховые – проекциям комплексных ветвей частотного спектра на действительную ($Re\gamma, \Omega$) и мнимую ($Im\gamma, \Omega$) плоскости. Дисперсионные уравнения (7), (8) при фиксированной частоте имеют конечное число действительных и чисто мнимых корней и счетное множество комплексных корней.

Номер частоты	Симметричные колебания				Кососимметричные колебания			
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	0,7864	0,7864	0	1,5709	0	1,6254	0	3,1416
2	4,6993	5,7306	3,3748	2,8883	3,1762	3,1762	2,4812	5,7766
3	5,7306	5,9475	4,6993	4,7124	6,7487	6,7487	4,0729	6,2832
4	7,3776	7,3776	6,3531	7,8540	6,8638	9,5315	6,8638	9,4248
5	8,1545	12,182	8,1545	8,6648	9,5315	10,851	8,9635	11,553
6	12,182	13,691	10,121	10,996	11,916	13,490	10,698	12,566
7	14,034	14,034	12,712	14,137	13,490	14,854	11,916	15,708
8	16,893	17,933	16,854	14,441	15,896	15,896	15,390	17,330
9	18,588	18,588	16,893	17,279	20,213	20,213	17,380	18,850
10	20,735	20,735	19,085	20,218	20,433	22,280	20,433	21,991
11	21,659	24,966	21,659	20,420	22,280	22,874	21,780	23,106
12	24,966	27,026	23,564	23,562	24,041	26,905	24,041	25,133
13	27,464	27,464	25,482	25,995	26,905	28,515	24,097	28,274
14	28,826	30,301	28,826	26,704	28,695	28,695	28,148	28,883
15	31,328	31,328	30,234	29,845	33,419	33,547	30,835	31,416

На основании уравнений (9), (10) в таблице приведены первые пятнадцать частот запираания. Столбцы с номером 1 соответствуют граничным условиям типа диафрагмы, столбцы 2 – жесткому заземлению торцов [2], столбцы 3 – свободным от напряжений плоским граням [1]. Значения частот запираания дисперсионного уравнения

колебаний однослойной изотропной ($\nu = 0,29$) пластины с покрытыми диафрагмой торцами представлены в столбцах 4.

На рис. 2 показаны зависимости безразмерных фазовых $v_p = c_p / c_{s2}$ (рис. 2, *a, в*) и групповых $v_g = c_g / c_{s2}$ (рис. 2, *б, г*) скоростей первых трех распространяющихся мод. Рис. 2, *a, б* соответствуют симметричным колебаниям, а рис. 2, *в, г* – кососимметричным.

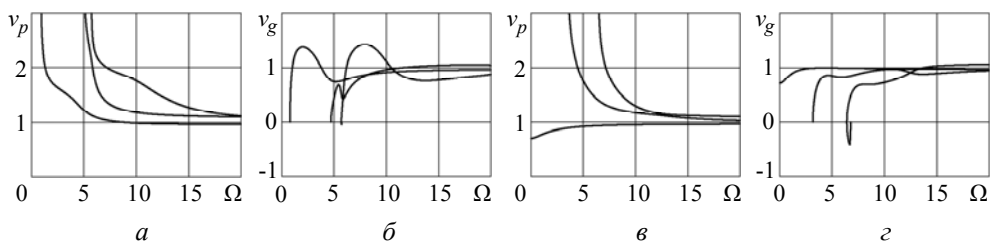


Рис. 2

Вблизи частот запирания фазовая скорость $c_p \rightarrow \infty$, а групповая – $c_g = 0$. В высокочастотном диапазоне все распространяющиеся моды трехслойной пластины становятся бездисперсными и значения групповой скорости мало отличаются от значений фазовой.

Данные рис. 3 иллюстрируют изменения безразмерных фазовых скоростей первых двух распространяющихся симметричных (рис. 3, *a*) и кососимметричных (рис. 3, *б*) мод при различных граничных условиях на торцах трехслойной пластины: диафрагма – кривые 1, жесткое защемление торцов – кривые 2, свободные от напряжений плоские грани – кривые 3.

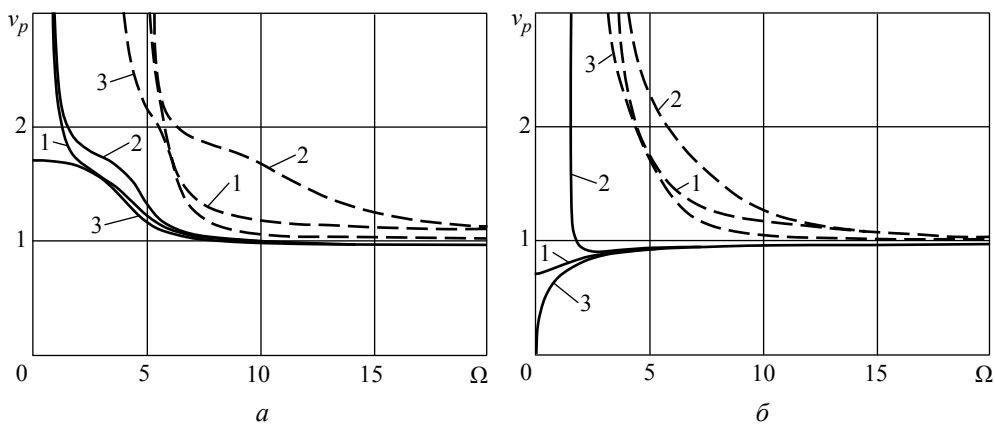


Рис. 3

Сплошные кривые соответствуют первой моде, а штриховые – второй. На графиках имеются точки касания кривых. Это свидетельствует о равенстве фазовых и, как следствие, групповых скоростей мод для различных граничных условий на лицевых плоскостях пластины.

Анализ дисперсионных кривых, частот запирания, графиков изменения фазовых и групповых скоростей показывает, что по сравнению с однослойной пластиной происходят количественные и качественные изменения характеристик волнового процесса. В частности, в трехслойной пластине в области низких частот для кососимметричного случая появляются одновременно действительная и мнимая моды, а для симметричного – только одна действительная. Первая кососимметричная мнимая мода оказывается распространяющейся при любой частоте и в низкочастотном пределе является

бездисперсной. При $\gamma = 0$ имеем $v_p^-(0) = v_g^-(0) = 0,714$. Для остальных ветвей в обоих случаях симметрии групповая скорость на частотах запираания равна нулю. Следует отметить, что в однослойной пластине дисперсионный спектр не содержит комплексных ветвей.

Одной из особенностей дисперсионных соотношений (7), (8) является то, что кривизна мнимых ветвей для определенных частот запираания становится отрицательной – дисперсионная ветвь опускается ниже частоты запираания, а вычисление групповой скорости v_g приводит к возникновению отрицательных участков на графике ее зависимости от Ω (рис. 2).

Уравнение (11) имеет вещественный корень, что указывает на существование поверхностной волны Стоунли вблизи плоскостей контакта слоев. Значение ее скорости v_{St} , отнесенной к c_{S2} , равно 0,968. В случае симметричных колебаний величина фазовой скорости v_p для первой моды в коротковолновом пределе остается больше асимптотического значения v_{St} , а для кососимметричных – меньше (рис. 2, а, б). Остальные кривые приближаются сверху к асимптоте $v_p = 1$.

Заключение.

Предложен аналитический метод решения трехмерной задачи об упругих колебаниях трехслойных симметричного строения пластин с торцами, покрытыми диафрагмой. Получены однородные решения системы уравнений движения в перемещениях в виде суммы вихревого и потенциального состояний.

Собственные функции вихревого и потенциального решений получены в явном виде. Для определения собственных значений имеем дисперсионные уравнения в форме, приспособленной для численных исследований.

На основе численно-аналитических исследований дисперсионных уравнений изучены некоторые закономерности в распространении упругих волн в трехслойной пластине в зависимости от изменения физико-механических свойств материалов слоев, их относительных толщин и частот колебаний.

РЕЗЮМЕ. Дано розв'язок тривимірної задачі про усталені коливання тришарових ізотропних пластин з покритими діафрагмою плоскими гранями. На межі поділу шарів прийнято умови ідеального контакту. Отримано однорідні розв'язки системи рівнянь руху в переміщеннях. Проведено асимптотичний аналіз і чисельне дослідження дисперсійних рівнянь. Наведено діаграми спектральних кривих, графіки змін фазових і групових швидкостей.

1. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Распространение волн в трехслойных пластинах со свободными от напряжений плоскими гранями // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 146 – 153.
2. Алтухов Е. В., Фоменко М. В. Упругие колебания трехслойных пластин симметричного строения // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – 18. – С. 3 – 10.
3. Лурье А. И. К теории толстых плит // Прикл. математика и механика. – 1942. – 6, № 2 – 3. – С. 151 – 168.
4. Устинов Ю. А. Математическая теория поперечно-неоднородных плит. – Ростов-на-Дону: ООО ЦВВР, 2006. – 257 с.
5. Шульга Н. А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
6. Bai H., Zhu J., Shah A. H., Popplewell N. Three-dimensional steady state Green function for a layered isotropic plate // J. Sound and Vibr. – 2004. – 269, N 1 – 2. – P. 251 – 271.
7. Birman V., Byrd L. W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // Appl. Mech. Rev. – 2007. – 60, N 5. – P. 195 – 216.
8. Carrera E., Brischetto S. A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates // Appl. Mech. Rev. – 2009. – 62, N 1. – P. 1 – 17.

9. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya.* Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 123 – 193.
10. *Gulyaev V. I., Lugovoi P. Z., Zayets Yu. A.* Shielding of elastic nonstationary waves by interfaces // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N. 4. – P. 414 – 422.
11. *Guz' A. N., Shul'ga N. A.* Dynamics of laminated and fibrous composites // *Appl. Mech. Rev.* – 1992. – **45**, N 2. – P. 35 – 60.
12. *Kashalyan M. Yu., Rushchitsky J. J.* General Hoyle–Youngdahl and Love Solutions in the Linear Inhomogeneous Theory of Elasticity // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 1. – P. 1 – 17.
13. *Liu L., Bhattacharya K.* Wave propagation in a sandwich structure // *Inter. J. Solids and Struct.* – 2009. – **46**, N 17. – P. 3290 – 3300.
14. *Ma C.-C., Lee G.-S.* General three-dimensional analysis of transient elastic waves in a multilayered medium // *J. Appl. Mech.* – 2005. – **73**, N 3. – P. 490 – 504.
15. *Qu Y., Meng G.* Three-dimensional elasticity solution for vibration analysis of functionally graded hollow and solid bodies of revolution. Part I: Theory // *Europ. J. Mech. A/Solids.* – 2014. – **44**. – P. 222 – 233.
16. *Reddy J. N., Robbins D. H. Jr.* Theories and computational models for composite laminates // *Appl. Mech. Rev.* – 1994. – **47**, N 6. – P. 147 – 169.
17. *Rokhlin S. I.* Recent advances in waves in layered media // *J. Phys. Sec. 4.* – 1992. – **2**, N 1, Pt. 2. – P. 819 – 826.
18. *Storozhev V. I.* Propagation of Electroelastic Waves in Multilayer Piezoelectric Cylinders with a Sector Notch // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 2. – P. 194 – 202.
19. *Ugrimov S. V.* Generalized theory of multilayer plates // *Int. J. Solids and Struct.* – 2002. – **39**, N 4. – P. 819 – 839.
20. *Vorovich I. I., Kadomtsev I. G.* Qualitative investigation of the stress-strain state of a sandwich plate // *J. Appl. Math. and Mech.* – 1970. – **34**, N 5. – P. 830 – 836.

Поступила 14.02.2011

Утверждена в печать 26.06.2013