

Я.М. Григоренко, Л.С. Рожок

**ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПОЛЫХ ЦИЛИНДРОВ
С НЕКРУГОВЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

*Институт механики им. С.П. Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина;
e-mail: ayagrigorenko@yandex.ru, r.l.s@mail.ru*

Abstract. In the framework of approach based on using the Fourier series for functions given over the discrete set of points, the problem is solved on the stress state of noncircular hollow cylinder in dependence on the form of cross-section and mechanical properties of material. The results of analysis of the stress state are presented in the form of plots and tables.

Key words: noncircular hollow cylinder, stress state, discrete Fourier series, method of discrete orthogonalization.

Введение.

Некоторые подходы к решению задач рассматриваемого класса изложены в работах [1, 3, 4, 7, 10 – 12, 14, 16]. Подход к решению задач о напряженном состоянии упругих тел, основанный на применении дискретных рядов Фурье, позволяет получать решение с достаточной степенью точности для тел сложной геометрии и структуры [5, 6]. В настоящей статье этот подход применен к решению задач о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением, изготовленных из изотропного и ортотропного материала, однослойных и слоистых, при определенных граничных условиях на торцах, в пространственной постановке.

§1. Постановка задачи и метод решения.

В качестве исходных принимаем уравнения пространственной теории упругости для ортотропного тела [2, 13, 15]. Первую квадратичную форму в ортогональной криволинейной системе координат s, t, γ для некруговых цилиндров запишем в виде

$$dS^2 = ds^2 + H_2^2(t, \gamma) dt^2 + d\gamma^2, \quad (1.1)$$

где s, t – длины дуг по образующей и направляющей цилиндрической поверхности приведения; γ – координата, отсчитываемая по нормали к этой поверхности; $H_2(t, \gamma) = 1 + \gamma / R_t$ – параметр Ламе; $R_t = R_t(t)$ – радиус кривизны поверхности приведения в поперечном сечении.

В общем случае рассмотрим полые многослойные эллиптические цилиндры, составленные из жестко скрепленных слоев, взаимодействующих без скольжения и отрыва. Примем, что в каждом слое материал является неоднородным по толщине и однородным по образующей и направляющей. Условия совместной работы слоев формулируются следующим образом: на поверхности контакта i -го и $i+1$ -го слоев должны быть непрерывны напряжения $\sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, \tau_{t\gamma}$ и перемещения u_γ, u_s, u_t , т.е. при $\gamma = \gamma_i$ имеем

$$\sigma_\gamma^i = \sigma_\gamma^{i+1}; \tau_{s\gamma}^i = \tau_{s\gamma}^{i+1}; \tau_{t\gamma}^i = \tau_{t\gamma}^{i+1}; u_\gamma^i = u_\gamma^{i+1}; u_s^i = u_s^{i+1}; u_t^i = u_t^{i+1}. \quad (1.2)$$

Принимая во внимание выражение (1.1), приведем основные уравнения, описывающие рассматриваемый класс задач для i -го слоя ($i = 0, 1, \dots, P$):
выражения для деформаций

$$e_s^i = \frac{\partial u_s^i}{\partial s}; \quad e_t^i = \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i; \quad e_\gamma^i = \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma};$$

$$e_{st}^i = \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} + \frac{\partial u_t^i}{\partial s}; \quad e_{s\gamma}^i = \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} + \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma}; \quad e_{t\gamma}^i = H_2^i \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{u_t^i}{H_2^i} \right) + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t}; \quad (1.3)$$

уравнения равновесия

$$H_2^i \frac{\partial \sigma_s^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{s\gamma}^i) = 0; \quad \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \tau_{t\gamma}^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{st}^i}{\partial s} + \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma}^i = 0; \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2^i \sigma_\gamma^i) + H_2^i \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial t} - \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_t^i = 0;$$

обобщенный закон Гука для ортотропного тела

$$e_s^i = a_{11}^i \sigma_s^i + a_{12}^i \sigma_t^i + a_{13}^i \sigma_\gamma^i; \quad e_t^i = a_{12}^i \sigma_s^i + a_{22}^i \sigma_t^i + a_{23}^i \sigma_\gamma^i;$$

$$e_\gamma^i = a_{13}^i \sigma_s^i + a_{23}^i \sigma_t^i + a_{33}^i \sigma_\gamma^i; \quad e_{t\gamma}^i = a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i; \quad e_{s\gamma}^i = a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i; \quad e_{st}^i = a_{66}^i \tau_{st}^i \quad (1.5)$$

$$\left(a_{11}^i = \frac{1}{E_s^i}; \quad a_{12}^i = -\frac{\nu_{st}^i}{E_t^i} = -\frac{\nu_{ts}^i}{E_s^i}; \quad a_{13}^i = -\frac{\nu_{s\gamma}^i}{E_\gamma^i} = -\frac{\nu_{\gamma s}^i}{E_s^i}; \quad a_{22}^i = \frac{1}{E_t^i}; \quad a_{23}^i = -\frac{\nu_{t\gamma}^i}{E_t^i} = -\frac{\nu_{\gamma t}^i}{E_\gamma^i}; \right.$$

$$\left. a_{33}^i = \frac{1}{E_\gamma^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G_{t\gamma}^i}; \quad a_{55}^i = \frac{1}{G_{s\gamma}^i}; \quad a_{66}^i = \frac{1}{G_{st}^i} \right), \quad (1.6)$$

где E_s^i, E_t^i, E_γ^i – модули упругости в направлении осей координат; $G_{s\gamma}^i, G_{t\gamma}^i, G_{st}^i$ – модули сдвига; $\nu_{t\gamma}^i, \nu_{s\gamma}^i, \nu_{st}^i, \nu_{\gamma t}^i, \nu_{\gamma s}^i, \nu_{ts}^i$ – соответствующие коэффициенты Пуассона.

Для трансверсально-изотропного материала имеем

$$a_{11}^i = \frac{1}{E^{ii}}; \quad a_{22}^i = -\frac{\nu^i}{E^{ii}}; \quad a_{13}^i = -\frac{\nu^{ii}}{E^i}; \quad a_{33}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{44}^i = \frac{1}{G^{ii}};$$

$$a_{22}^i = a_{11}^i; \quad a_{23}^i = a_{13}^i; \quad a_{55}^i = a_{44}^i; \quad a_{66}^i = \frac{1}{G^i} = \frac{2(1+\nu^i)}{E^i}. \quad (1.7)$$

Здесь $E_s^i = E_t^i = E$; $E_\gamma^i = E^{ii}$; $G_{s\gamma}^i = G_{t\gamma}^i = G^{ii}$; $\nu_{st}^i = \nu^i$; $\nu_{s\gamma}^i = \nu_{t\gamma}^i = \nu^{ii}$; E^i, E^{ii} – модули упругости в направлении осей координат; G^{ii} – модуль сдвига; ν^i, ν^{ii} – соответствующие коэффициенты Пуассона.

Для изотропного материала

$$a_{11}^i = a_{22}^i = a_{33}^i = \frac{1}{E^i}; \quad a_{12}^i = a_{13}^i = a_{23}^i = -\frac{\nu^i}{E^i}; \quad a_{44}^i = a_{55}^i = a_{66}^i = \frac{2(1+\nu^i)}{E^i}, \quad (1.8)$$

где E^i – модуль упругости; ν^i – коэффициент Пуассона.

Соотношения (1.3) – (1.5) представляют собой замкнутую систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих напряженное состояние слоистых

некруговых ортотропных полых цилиндров в области $\{0 \leq s \leq l; t_1 \leq t \leq t_2; \gamma_0 \leq \gamma \leq \gamma_p\}$. Для определения произволов, содержащихся в общем интеграле этой системы, необходимо задать граничные условия. На внешней и внутренней поверхностях цилиндра могут быть заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_\gamma^p = q_\gamma^+; \tau_{s\gamma}^p = q_s^+; \tau_{t\gamma}^p = q_t^+ \quad \text{при } \gamma = \gamma_p; \quad (1.9)$$

$$\sigma_\gamma^0 = q_\gamma^-; \tau_{s\gamma}^0 = q_s^-; \tau_{t\gamma}^0 = q_t^- \quad \text{при } \gamma = \gamma_0.$$

Кроме условий на ограничивающих поверхностях, необходимо удовлетворять граничным условиям на торцах цилиндра при $s = 0; s = l$.

Выбирая в качестве разрешающих функций компоненты напряжений $\sigma_\gamma^i, \tau_{s\gamma}^i, \tau_{t\gamma}^i$ и перемещений u_γ^i, u_s^i, u_t^i , после некоторых преобразований из (1.3) – (1.5) получаем систему разрешающих дифференциальных уравнений в частных производных в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial \gamma} &= (c_2^i - 1) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \sigma_\gamma^i - \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial t} + b_{22}^i \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \right)^2 u_\gamma^i + \\ &+ b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_s^i}{\partial s} + b_{22}^i \frac{1}{H_2^{i2}} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t^i}{\partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_1^i \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial s} - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma}^i - b_{12}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s} - b_{11}^i \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s^2} - \\ &- b_{66}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_s^i}{\partial t} \right) - (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial^2 u_t^i}{\partial s \partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}^i}{\partial \gamma} &= -c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial \sigma_\gamma^i}{\partial t} - \frac{2}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma}^i - b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i \right) - \\ &- (b_{12}^i + b_{66}^i) \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial^2 u_s^i}{\partial s \partial t} - b_{22}^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t} \right) - b_{66}^i \frac{\partial^2 u_t^i}{\partial s^2}; \\ \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma} &= c_4^i \sigma_\gamma^i - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_\gamma^i - c_1^i \frac{\partial u_s^i}{\partial s} - c_2^i \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_t^i}{\partial t}; \\ \frac{\partial u_s^i}{\partial \gamma} &= a_{55}^i \tau_{s\gamma}^i - \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial s}; \quad \frac{\partial u_t^i}{\partial \gamma} = a_{44}^i \tau_{t\gamma}^i - \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial t} + \frac{1}{H_2^i} \frac{\partial H_2^i}{\partial \gamma} u_t^i \\ (b_{11}^i &= a_{22}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{12}^i = -a_{12}^i a_{66}^i / \Omega^i; \quad b_{22}^i = a_{11}^i a_{66}^i / \Omega^i; \\ b_{66}^i &= (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) / \Omega^i; \quad \Omega^i = (a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2}) a_{66}^i; \\ c_1^i &= -(b_{11}^i a_{13}^i + b_{12}^i a_{23}^i); \quad c_2^i = -(b_{12}^i a_{13}^i + b_{22}^i a_{23}^i); \quad c_4^i = a_{33}^i + c_1^i a_{13}^i + c_2^i a_{23}^i). \end{aligned} \quad (1.10)$$

На торцах цилиндра предполагаем наличие таких граничных условий, которые допускают сведение трехмерной краевой задачи для системы уравнений (1.10) к двумерной путем разложения искомым факторов в тригонометрические ряды по образующей цилиндра. Рассматриваем цилиндры, на торцах которых имеет место диафрагма, абсолютно жесткая в своей плоскости и гибкая из нее, т. е. выполняются следующие граничные условия:

$$\sigma_s^i = u_t^i = u_\gamma^i = 0 \text{ при } s = 0; \quad s = l. \quad (1.11)$$

Цилиндры замкнуты по направляющей, поэтому разрешающие функции будут удовлетворять условиям периодичности

$$\psi(\gamma, s, t) = \psi(\gamma, s, t + \Pi), \quad (1.12)$$

где $\psi = \{ \sigma_\gamma^i, \tau_{s\gamma}^i, \tau_{t\gamma}^i, u_\gamma^i, u_s^i, u_t^i \}$; Π – периметр поперечного сечения поверхности приведения.

Запишем разрешающие функции и компоненты нагрузки в виде разложений в ряды Фурье по образующей цилиндра (в дальнейшем индекс i опустим)

$$X(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N X_n(t, \gamma) \sin \lambda_n s; \quad Y(s, t, \gamma) = \sum_{n=1}^N Y_n(t, \gamma) \cos \lambda_n s, \quad (1.13)$$

где $X = \{ \sigma_\gamma, \tau_{t\gamma}, u_\gamma, u_t, q_\gamma, q_t \}$, $Y = \{ \tau_{s\gamma}, u_s, q_s \}$, $\lambda_n = \pi n / l$ ($0 \leq s \leq l$).

Подставляя (1.13) в систему уравнений (1.10) и граничные условия (1.9), после разделения переменных получаем двумерную краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \sigma_{\gamma,n} + \lambda_n \tau_{s\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial t} + b_{22} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \right)^2 u_{\gamma,n} + \\ &+ b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{s,n} + b_{22} \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma,n}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{s\gamma,n} - b_{12} \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,n} - \\ &- b_{66} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} \right) - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma,n}}{\partial \gamma} &= -c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \sigma_{\gamma,n}}{\partial t} - \frac{2}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \tau_{t\gamma,n} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} \right) - \\ &- (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{s,n}}{\partial t} - b_{22} \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t} \right) + b_{66} \lambda_n^2 u_{t,n}; \\ \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{\gamma,n} + c_1 \lambda_n u_{s,n} - c_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{t,n}}{\partial t}; \\ \frac{\partial u_{s,n}}{\partial \gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,n} - \lambda_n u_{\gamma,n}; \quad \frac{\partial u_{t,n}}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_{\gamma,n}}{\partial t} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_{t,n} \quad (n = \overline{1, N}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma,n} &= q_{\gamma,n}^-; \quad \tau_{s\gamma,n} = q_{s,n}^-; \quad \tau_{t\gamma,n} = q_{t,n}^- \quad \text{при } \gamma = \gamma_0; \\ \sigma_{\gamma,n} &= q_{\gamma,n}^+; \quad \tau_{s\gamma,n} = q_{s,n}^+; \quad \tau_{t\gamma,n} = q_{t,n}^+ \quad \text{при } \gamma = \gamma_P.\end{aligned}\quad (1.15)$$

Для сведения полученной двумерной краевой задачи к одномерной, используем подход, основанный на замене членов разрешающей системы уравнений (1.14), которые препятствуют разделению переменных вдоль направляющей цилиндра, новыми дополнительными функциями, которые выражаются через разрешающие функции и включают в себя геометрические параметры цилиндра, т.е.

$$\begin{aligned}\varphi_1^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \sigma_\gamma; \tau_{s\gamma}; u_\gamma; u_s; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma \right\} \quad (j = \overline{1,5}); \\ \varphi_2^j &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \left\{ \tau_{t\gamma}; u_t \right\} \quad (j = \overline{1,2}); \quad \varphi_3^j = \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_\gamma}{\partial t}; \frac{\partial u_s}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_4^j &= \frac{1}{H_2} \left\{ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial t}; \frac{\partial u_t}{\partial t}; \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} \frac{\partial u_t}{\partial t} \right\} \quad (j = \overline{1,3}); \\ \varphi_5 &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1^3; \quad \varphi_6 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3^3; \quad \varphi_7 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_4^2.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений (номер n в обозначениях разрешающих функций опускаем для простоты):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial \gamma} &= (c_2 - 1) \varphi_1^1 + \lambda_n \tau_{t\gamma} - \varphi_4^1 + b_{22} \varphi_1^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_1^4 + b_{22} \varphi_4^3; \\ \frac{\partial \tau_{s\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_\gamma - \varphi_1^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_1^3 + b_{11} \lambda_n^2 u_s - b_{66} \varphi_6 - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_4^2; \\ \frac{\partial \tau_{t\gamma}}{\partial \gamma} &= -c_2 \varphi_3^1 - 2\varphi_2^1 - b_{22} \varphi_5 + (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_3^3 - b_{22} \varphi_7 - b_{66} \lambda_n^2 u_t; \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} &= c_4 \sigma_\gamma - c_2 \varphi_4^2 + c_1 \lambda_n u_s - c \varphi_{21}^3; \quad \frac{\partial u_s}{\partial \gamma} = a_{55} \tau_{s\gamma} - \lambda_n u_\gamma; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma} - \varphi_3^2 + \varphi_2^2\end{aligned}\quad (1.17)$$

с граничными условиями (1.15).

Представим все функции, входящие в систему уравнений (1.17), в виде разложений в ряды Фурье по координате t

$$\tilde{X}(t, \gamma) = \sum_{k=0}^K \tilde{X}_k(\gamma) \cos \lambda_k t; \quad \tilde{Y}(t, \gamma) = \sum_{k=1}^K \tilde{Y}_k(\gamma) \sin \lambda_k t \quad (1.18)$$

$$\left(\tilde{X} = \left\{ \sigma_\gamma, \tau_{s\gamma}, u_\gamma, u_s, \varphi_1^j, \varphi_4^j, \varphi_6, q_\gamma, q_s \right\}, \tilde{Y} = \left\{ \tau_{t\gamma}, u_t, \varphi_2^j, \varphi_3^j, \varphi_5, \varphi_7, q_t \right\}, \quad \lambda_k = 2k\pi/P \right).$$

После подстановки разложений (1.18) в уравнения (1.16) и граничные условия (1.15), разделив переменные, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно амплитудных значений функций, входящих в систему уравнений (1.17), т.е.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{\gamma,k}}{d\gamma} &= (c_2 - 1) \varphi_{1,k}^1 + \lambda_n \tau_{s\gamma,k} - \varphi_{4,k}^1 + b_{22} \varphi_{1,k}^5 + b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^4 + b_{22} \varphi_{4,k}^3; \\
\frac{d\tau_{s\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_1 \lambda_n \sigma_{\gamma,k} - \varphi_{1,k}^2 - b_{12} \lambda_n \varphi_{1,k}^3 + b_{11} \lambda_n^2 u_{s,k} - b_{66} \varphi_{6,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{4,k}^2; \\
\frac{d\tau_{t\gamma,k}}{d\gamma} &= -c_2 \varphi_{3,k}^1 - 2\varphi_{2,k}^1 - b_{22} \varphi_{5,k} - (b_{12} + b_{66}) \lambda_n \varphi_{3,k}^3 - b_{22} \varphi_{7,k} + b_{66} \lambda_n^2 u_{t,k}; \\
\frac{du_{\gamma,k}}{d\gamma} &= c_4 \sigma_{\gamma,k} - c_2 \varphi_{4,k}^2 + c_1 \lambda_n u_{s,k} - c_2 \varphi_{1,k}^3; \\
\frac{du_{s,k}}{d\gamma} &= a_{55} \tau_{s\gamma,k} - \lambda_n u_{\gamma,k}; \quad \frac{du_{t,k}}{d\gamma} = a_{44} \tau_{t\gamma,k} - \varphi_{3,k}^2 + \varphi_{2,k}^2 \quad (k = \overline{0, K})
\end{aligned} \tag{1.19}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned}
\gamma = \gamma_0 : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}^-; \quad \tau_{s\gamma,k} = q_{s,k}^-; \quad \tau_{t\gamma,k} = q_{t,k}^-; \\
\gamma = \gamma_p : \quad \sigma_{\gamma,k} &= q_{\gamma,k}^+; \quad \tau_{s\gamma,k} = q_{s,k}^+; \quad \tau_{t\gamma,k} = q_{t,k}^+.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Полученную одномерную краевую задачу для системы уравнений (1.19) решаем устойчивым численным методом дискретной ортогонализации одновременно для всех гармоник разложений (1.18). Однако, система уравнений (1.19) кроме разрешающих функций содержит еще и дополнительные функции, т.е. количество неизвестных превосходит количество уравнений. Поэтому в процессе интегрирования, на каждом шаге применения численного метода будем определять амплитудные значения дополнительных функций (1.16), раскладывая их в дискретные ряды Фурье по координате t и используя стандартную процедуру определения коэффициентов Фурье для таблично заданных функций [8].

Рассмотрим некруговые полые цилиндры, срединная поверхность которых может быть задана либо в параметрической форме, либо в полярной системе координат [9].

Пусть срединная поверхность цилиндра задана в параметрической форме

$$x = x(\theta); \quad z = z(\theta), \tag{1.21}$$

где θ – некоторый угловой параметр; тогда для функции $V(t(\theta), \gamma)$ переход от координаты t к координате θ осуществляется следующим образом:

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \omega(\theta); \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\theta)} \frac{\partial V}{\partial \theta}. \tag{1.22}$$

При этом радиус кривизны поверхности приведения будет равен

$$R(\theta) = \omega^3(\theta) / \left(\frac{dx}{d\theta} \frac{d^2 z}{d\theta^2} - \frac{dz}{d\theta} \frac{d^2 x}{d\theta^2} \right). \tag{1.23}$$

Если срединная поверхность задана в полярной системе координат $\rho = f(\psi)$, тогда имеем

$$\frac{dt}{d\psi} = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} = \omega(\psi); \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \psi}; \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\omega(\psi)} \frac{\partial V}{\partial \psi} \tag{1.24}$$

и радиус кривизны вычисляется по формуле

$$R(\psi) = \omega^3(\psi) / (\rho^2 + 2\rho'^2 + \rho\rho''). \tag{1.25}$$

§2. Полые цилиндры с эллиптическим поперечным сечением.

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии полого цилиндра с эллиптическим поперечным сечением, направляющая срединной поверхности которого задана параметрически в виде

$$x = b \cos \theta; \quad z = a \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad (2.1)$$

где a, b – малая и большая полуоси эллипса, у которого периметр поперечного сечения равен длине окружности радиуса R , т.е.

$$\pi(a+b)f = 2\pi R; \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots; \quad \Delta = \frac{b-a}{b+a}. \quad (2.2)$$

Тогда имеем равенства

$$a = \frac{R}{f}(1-\Delta); \quad b = \frac{R}{f}(1+\Delta); \quad \frac{b}{a} = \frac{1+\Delta}{1-\Delta}. \quad (2.3)$$

Величина Δ характеризует отклонение формы поперечного сечения цилиндра от круговой (при $\Delta=0$ имеем круговой цилиндр). При этом эксцентриситет эллипса e связан с

$$\Delta \text{ следующим образом: } e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1+\Delta}.$$

Тогда имеют место такие формулы:

$$H_2(\theta, \gamma) = \left(1 + \frac{\gamma}{R(\theta)}\right) \omega(\theta); \quad R(\theta) = \frac{\omega^3(\theta)}{ab};$$

$$\omega(\theta) = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.4)$$

Цилиндр находится под действием нагрузки $q = -q_0 \sin(\pi s/l)$, приложенной на его внешней поверхности.

2.1. Однослойные цилиндры. а) *Изотропные.* Проведем исследование влияния степени эллиптичности Δ и толщины H изотропных полых цилиндров на распределение полей перемещений u_γ и напряжений σ_θ . Задача решена при таких исходных данных: $\Delta = 0; 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; R = 40; l = 60; H = 5; 10; 15; \nu = 0,3$.

Результаты решения задачи приведены на рис. 1 – 3 в среднем сечении по длине цилиндра ($l = 30$). На рис. 1 показаны графики изменения перемещений u_γ для срединной поверхности ($\gamma=0$), на рис. 2 – графики изменения напряжений σ_θ на внутрен-

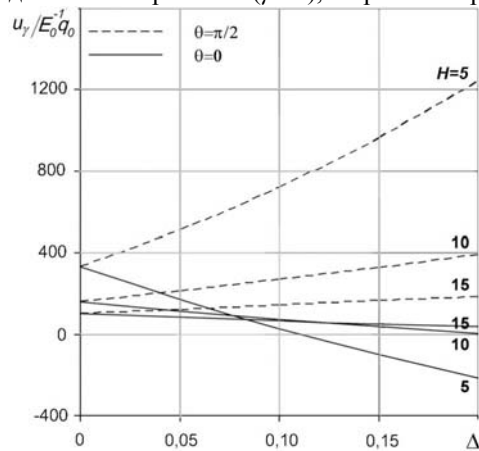


Рис. 1

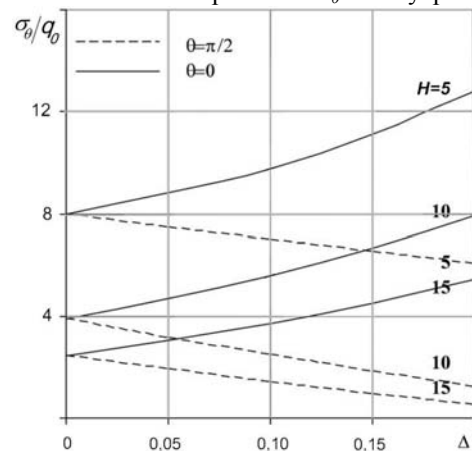


Рис. 2

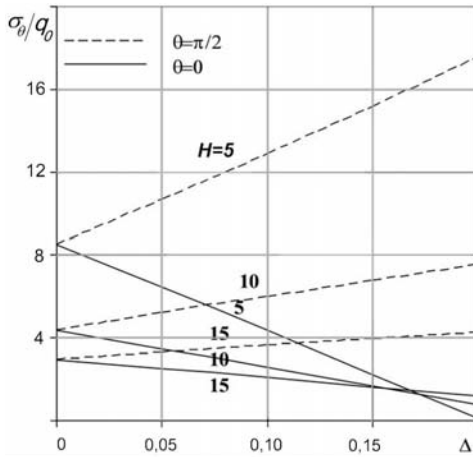


Рис. 3

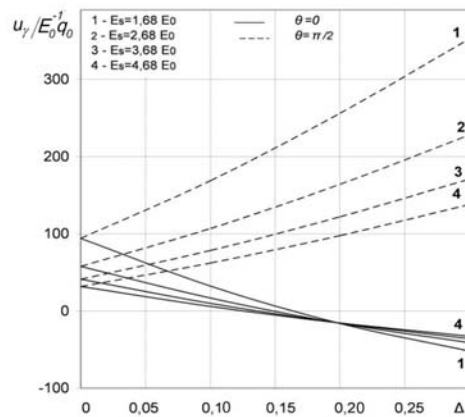


Рис. 4

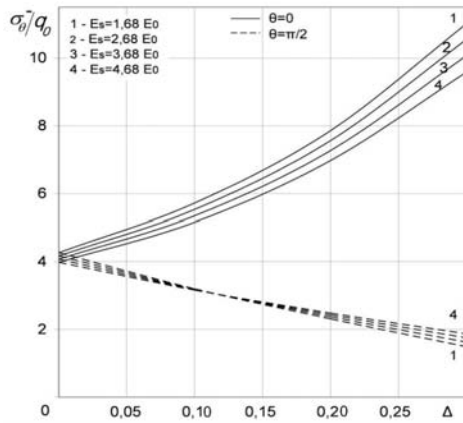


Рис. 5

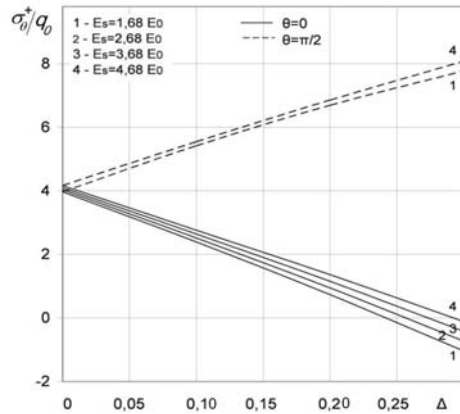


Рис. 6

ней поверхности ($\gamma = -H/2$), а на рис. 3 – напряжений σ_θ на внешней поверхности ($\gamma = H/2$). Из анализа приведенных на рис. 1 графиков следует, что в отличие от круговых цилиндров, для цилиндров с эллиптическим поперечным сечением в зоне большей жесткости ($\theta = 0$) цилиндр прогибается в направлении, противоположном действию нагрузки, и прогиб с возрастанием степени эллиптичности и толщины возрастает. В зоне меньшей жесткости ($\theta = \pi/2$) прогиб цилиндра в несколько раз больше и цилиндр прогибается в направлении действия нагрузки.

Напряжения σ_θ на внутренней поверхности цилиндра (рис. 2) увеличиваются по величине с ростом степени эллиптичности и толщины, при этом в зоне меньшей жесткости ($\theta = \pi/2$) имеем сжатие, а в зоне большей жесткости ($\theta = 0$) – растяжение. На внешней поверхности цилиндра (рис. 3) наоборот, при $\theta = 0$ – сжатие, а при $\theta = \pi/2$ – растяжение.

б) *Трансверсально-изотропные.* Проведем анализ напряженного состояния полых эллиптических цилиндров, изготовленных из трансверсально-изотропного материала в зависимости от степени эллиптичности цилиндра и механических параметров материала. Задача решена при таких исходных данных: $R = 40$; $H = 10$;

$l = 60$; $\Delta = 0, 0,1, 0,2, 0,3$. Механические независимые параметры имеют вид: $\nu_{s\theta} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = \nu_{\theta\gamma} = 0,405$; $G_{s\gamma} = G_{\theta\gamma} = 0,45E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $E_s = E_\theta = 1,68E_0$; $2,68E_0$; $3,68E_0$; $4,68E_0$.

Результаты решения задачи приведены на рис. 4 – 6 в среднем сечении по длине цилиндра ($l = 30$). На рис. 4 приведены графики распределения нормального переме-

щения u_γ на внутренней поверхности цилиндра $\gamma = \gamma_1$ для четырех вариантов трансверсально-изотропного материала в зависимости от степени эллиптичности Δ . Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены варианты, соответственно, для четырех значений E_s . Сплошные линии соответствуют значениям перемещений u_γ в сечении $\theta = 0$, штриховые линии – в сечении $\theta = \pi/2$.

Из рис. 4 видно, что с увеличением степени эллиптичности Δ в зоне большей жесткости $\theta = 0$ влияние изменения значения E_s становится менее значительным. Так, если для кругового цилиндра $\Delta = 0$ увеличение значений E_s от 1,68 до 4,68 ведет к уменьшению значений перемещений в 3 раза, для $\Delta = 0,1$ – в 5 раз, то для $\Delta = 0,3$ значения перемещений уменьшаются в 1,5 раза. При этом они меняют знак на противоположный. Значения перемещений для цилиндра $\Delta = 0,2$ практически не изменяются с изменением значений E_s . В зоне меньшей жесткости $\theta = \pi/2$ с увеличением степени эллиптичности и значения E_s , значения перемещений уменьшаются в 2,7 раза для $\Delta = 0,1$, в 2,6 раза для $\Delta = 0,2$ и в 2,5 раза для $\Delta = 0,3$.

На рис. 5 и 6 представлены графики распределения напряжений σ_θ на внутренней (рис. 5) и внешней (рис. 6) поверхностях цилиндра при тех же значениях параметров.

Из рис. 5 видно, что значения напряжений σ_θ на внутренней поверхности цилиндра в зоне меньшей жесткости $\theta = \pi/2$ не зависят от изменения значений E_s для цилиндров со степенью эллиптичности $\Delta = 0,1$. С увеличением значения Δ влияние значения E_s становится более существенным в зоне большей жесткости $\theta = 0$.

На внешней поверхности цилиндра (рис. 6) в зоне большей жесткости $\theta = 0$ перераспределение значений напряжений σ_θ с увеличением степени эллиптичности более ощутимо, чем в зоне $\theta = \pi/2$.

в) *Ортотропные*. Рассмотрим влияние изменения толщины на напряженное состояние эллиптических цилиндров, выполненных из ортотропного материала. Расчеты выполнены при следующих значениях геометрических и механических параметров: $\Delta = 0; 0,1; 0,2$; $H = 2, 3$; $l = 10$; $R = 10$; $E_s = 1,90E_0$; $E_t = 1,20E_0$; $E_\gamma = 0,45E_0$; $G_{s\theta} = 0,30E_0$; $G_{\theta\gamma} = G_{s\gamma} = 0,23E_0$; $\nu_{s\theta} = 0,15$; $\nu_{s\theta} = 0,15$; $\nu_{s\theta} = 0,15$; $\nu_{\gamma\theta} = 0,30$; $\nu_{\gamma s} = 0,07$. Результаты решения задачи приведены в табл. 1 для значений перемещений u_γ и напряжений σ_θ в сечениях $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ на внутренней и внешней поверхностях цилиндра для всех значений H и Δ в среднем сечении по длине цилиндра ($s = 5$).

Из табл. 1 видно, что по сравнению с круговым цилиндром, в некруговом цилиндре с увеличением степени эллиптичности наблюдается рост перемещений u_γ в области зоны меньшей жесткости ($\theta = \pi/2$). Так, отношение значений перемещений при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 0$ при $\Delta = 0; 0,1; 0,2$ составляет для $H = 2$: 1; 2,3; 6,5; для $H = 3$: 1; 1,8; 3,3. Отсюда видно взаимовлияние эксцентриситета эллипса и толщины цилиндра на изменение величины перемещений u_γ . Так, при различных значениях толщины цилиндра и некоторых значениях Δ перемещения равны. Напряжения σ_θ с увеличением степени эллиптичности на внутренней поверхности цилиндра возрастают и достигают максимальной величины в зоне меньшей податливости, т.е. большей жесткости ($\theta = 0$). На внешней поверхности цилиндра напряжения σ_θ с увеличением Δ возрастают и достигают максимальных значений при $\theta = \pi/2$. С увеличением толщины цилиндра напряжения уменьшаются, но характер их распределения сохраняется.

Таблица 1

H	γ/H	Δ	$u_r/E_0^{-1}q_0$		σ_θ/q_0	
			θ/π			
			0	0,5	0	0,5
2	-1/2	0,0	31,75	31,75	3,49	3,49
		0,1	19,38	45,09	4,47	2,66
		0,2	8,90	58,29	5,72	1,92
	1/2	0,0	28,70	28,70	4,61	4,61
		0,1	16,83	41,84	3,47	5,47
		0,2	7,14	55,12	2,17	6,01
3	-1/2	0,0	17,61	17,61	1,98	1,98
		0,1	12,72	22,39	2,67	1,40
		0,2	8,06	26,71	3,56	0,91
	1/2	0,0	16,30	16,30	2,96	2,96
		0,1	11,67	21,09	2,48	3,29
		0,2	7,64	25,65	1,92	3,45

2.2. Слоистые цилиндры. Рассмотрим трехслойные цилиндры с эллиптическим поперечным сечением, находящиеся под действием равномерной нагрузки, приложенной либо на внешней, либо на внутренней поверхности цилиндра симметричного строения относительно срединной поверхности. Внутренний и внешний слои – изотропные, толщина каждого слоя h , модуль упругости $E=E_0$ и коэффициент Пуассона ν . Средний слой имеет толщину H и может быть изготовлен из различных материалов.

а) *Изотропные, неоднородные слои.* Пусть средний слой – изотропный с модулем упругости $E = dE_0$ и коэффициентом Пуассона ν .

Задача решена при таких исходных данных: $\Delta = 0; 0,1; 0,2; h = 2; H = 4; \nu = 0,3; R = 40; l = 60; d = 1; 0,1$. Нагрузка приложена на внутренней поверхности. Результаты решения задачи приведены в табл. 2 и на рис. 7, 8 в среднем сечении по длине цилиндра.

В табл. 2 (вариант I) приведены значения перемещений u_r в зонах большей и меньшей жесткости цилиндра для некоторых значений вдоль толщины.

Таблица 2

V	d	γ/H	$u_r/E_0^{-1}q_0$					
			$\Delta = 0$		$\Delta = 0,1$		$\Delta = 0,2$	
			$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
I	1	-1/2	180,60	180,60	45,89	349,02	-59,24	554,65
		-1/4	177,37	177,37	41,68	346,92	-64,39	553,96
		0	174,03	174,03	38,81	343,34	-66,48	550,39
		1/2	170,56	170,56	36,91	338,45	-66,53	544,24
		1/4	166,89	166,89	35,80	332,26	-65,01	535,51
	0,1	-1/2	328,03	328,03	89,28	615,23	-105,96	954,77
		-1/4	322,85	322,85	83,53	611,32	-111,90	952,02
		0	311,06	311,06	75,30	597,41	-114,17	936,98
		1/2	300,02	300,02	67,82	583,80	-116,55	921,50
		1/4	294,01	294,01	65,19	574,47	-115,74	908,94
II	-	-1/2	106,26	106,26	-0,37	238,83	-84,77	401,48
		-1/4	103,29	103,29	-4,13	236,82	-89,29	400,61
		0	98,53	98,53	-8,45	232,01	-92,81	396,23
		1/4	92,81	92,81	-10,96	223,25	-91,84	384,53
		1/2	90,44	90,44	-11,46	218,98	-90,39	378,32

Из приведенных в табл. 2 данных видно, как влияет на значения перемещений u_γ наличие неоднородного слоя. Так, для круговых цилиндров ($\Delta = 0$) при $d = 0,1$, т.е. за счет слабого среднего слоя прогиб цилиндра значительно увеличивается. Для эллиптических цилиндров $\Delta \neq 0$ при $\theta = 0$ прогиб значительно уменьшается и даже меняет знак на противоположный, а при $\theta = \pi/2$ – увеличивается в 2–3 раза. Таким образом, уже незначительное отклонение формы поперечного сечения от круговой значительно влияет на деформирование цилиндра.

На рис. 7 приведены графики распределения напряжений σ_θ вдоль толщины цилиндра в зоне большей жесткости цилиндра, а на рис. 8 – в зоне меньшей жесткости цилиндра. Из рис. 7, 8 видим, как влияет неоднородность материала на распределение по толщине цилиндра напряжений σ_θ в зонах его большей и меньшей жесткости.

б) *Трансверсально-изотропный средний слой.* Исследуем напряженное состояние эллиптических цилиндров, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на внешней поверхности цилиндра, средний слой которого изготовлен из трансверсально-изотропного материала

Задача решена при следующих исходных данных: $R = 40$; $l = 60$; $h = 2$; $H = 4$; $E = E_0$; $E' = 0,2E_0$; $\nu = 0,2$; $\nu' = 0,6$; $G' = 0,1E_0$; $\Delta = 0; 0,1; 0,2; 0,3$.

Таблица 3

γ/H	$u_\gamma/E_0^{-1}q_0$							
	$\Delta = 0$		$\Delta = 0,1$		$\Delta = 0,2$		$\Delta = 0,3$	
	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi/2$
-1/2	208,63	208,63	47,92	404,87	-81,47	641,78	-178,15	920,78
-1/4	207,32	207,32	45,96	404,56	-83,85	642,82	-180,52	923,69
0	172,70	172,70	12,40	369,20	-117,90	608,18	-220,36	891,51
1/2	128,63	128,63	-19,81	312,70	-140,18	539,36	-237,70	810,65
1/4	127,95	127,95	-17,34	308,98	-134,24	532,63	-227,61	800,99

Результаты решения задачи в среднем сечении по длине цилиндра представлены в табл. 3 и на рис. 9, 10. В табл. 3 представлены значения перемещений u_γ , а на рис. 9, 10 – графики распределения напряжений σ_θ по толщине цилиндра в сечениях $\theta = 0$ (рис. 9) и $\theta = \pi/2$ (рис. 10) в зависимости от степени эллиптичности цилиндров Δ .

Из табл. 3 видно, что с увеличением степени эллиптичности перемещения для $\Delta=0,1$ на внешней поверхности в зоне большей жесткости уменьшаются в 2,8 раза, меняя свой знак на противоположный по сравнению с перемещениями на внутренней поверхности. Для $\Delta = 0,2$ и $\Delta = 0,3$ перемещения меняют знак на противоположный и увеличиваются в 1,7 и 1,3 раза, соответственно. В зоне меньшей жесткости цилиндра значения перемещений уменьшаются при переходе от внешней к внутренней поверхности в 1,3 для $\Delta = 0,1$, в 1,2 раза для $\Delta = 0,2$ и в 1,15 раза для $\Delta = 0,3$.

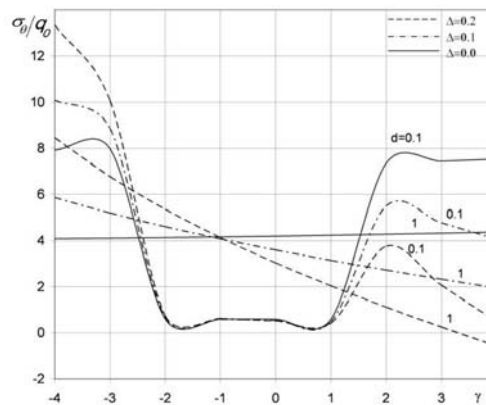


Рис. 7

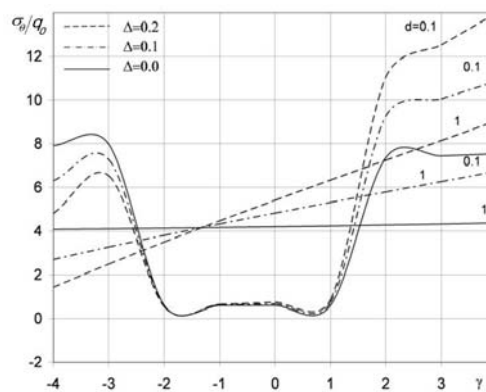


Рис. 8

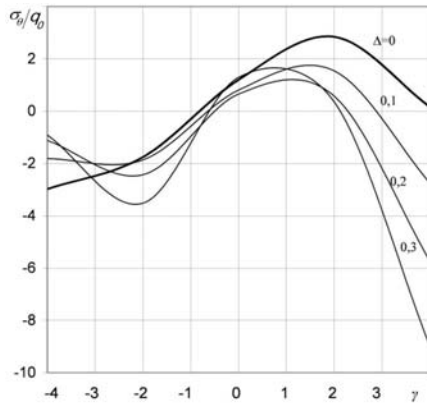


Рис. 9

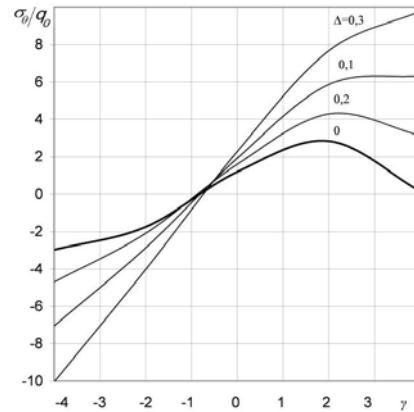


Рис. 10

в) *Ортотропный средний слой.* Рассмотрим случай, когда средний слой изготовлен из ортотропного материала с такими механическими параметрами: $E_s = 3,68E_0$; $E_t = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $G_{st} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{t\gamma} = 0,41E_0$; $\nu_{st} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{t\gamma} = 0,431$. Задача решена при следующих исходных данных: $h = 2$; $H = 4$; $R = 40$; $l = 60$; $d = 1$; $0,1$; $\Delta = 0; 0,1; 0,2$.

В табл. 2 (вариант II) приведены значения перемещений u_γ в зонах большей и меньшей жесткости цилиндра в среднем сечении по длине цилиндра. Наличие ортотропного среднего слоя приводит к тому, что уже для цилиндров со степенью эллиптичности $\Delta = 0,1$ в зоне большей жесткости $\theta = 0$ перемещения меняют свой знак на противоположный. В зоне меньшей жесткости $\theta = \pi/2$ значения перемещений u_γ увеличиваются в среднем в 2,2 – 2,4 раза по толщине для $\Delta = 0,1$ и в 3,8 – 4,2 раза для $\Delta = 0,2$, в то время как для однородного изотропного цилиндра при $\Delta = 0,1$ значения перемещений увеличиваются в 1,9 раза по всей толщине цилиндра и в 3 – 3,2 раза для $\Delta = 0,2$.

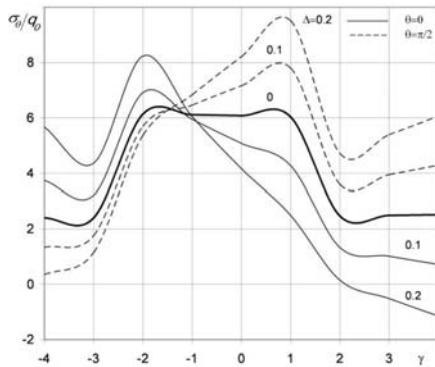


Рис. 11

Изменение полей напряжений по толщине цилиндра в среднем сечении по длине, для различных значений степени эллиптичности представлено на рис. 11. Из графиков видно, что увеличение степени эллиптичности и наличие ортотропного среднего слоя приводит к тому, что в зоне большей полуоси эллипса ($\theta = 0$) максимальные значения напряжения σ_θ принимают на границе внутреннего несущего и среднего слоев, а в зоне меньшей полуоси ($\theta = \pi/2$) – область максимума смещается в сторону внешнего несущего слоя.

§3. Полюсы цилиндры с гофрами в поперечном сечении.

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии полого цилиндра с гофрами в поперечном сечении, находящейся под действием внутреннего давления $q = q_0 \sin(\pi s/l)$. Направляющая поверхности отсчета $\gamma = \gamma_0$ для цилиндра задается в плоскости поперечного сечения Oxz в полярной системе координат

$$\rho = r_0 + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi),$$

где ρ – полярный радиус; r_0 – радиус среднего круга; α – амплитуда; m – частота гофрировки.

Тогда имеем формулы

$$\omega(\psi) = \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2} = \sqrt{(r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + (\alpha m \sin m\psi)^2};$$

$$R(\psi) = \frac{\sqrt{\left((r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + (\alpha m \sin m\psi)^2\right)^3}}{\left((r_0 + \alpha \cos m\psi)^2 + 2(\alpha m \sin m\psi)^2 + (r_0 + b \cos m\psi)\alpha m^2 \cos m\psi\right)}.$$

3.1. Однослойные цилиндры. а) *Изотропные.* Проведем исследование напряженного состояния полых изотропных цилиндров с гофрами в поперечном сечении в зависимости от изменения толщины цилиндров.

Задача решена при следующих исходных данных: $r_0 = 40; l = 60; h = 4, 5, 6, 8; m = 4; \alpha = 4; \nu = 0,3$. На графиках и в таблицах даны результаты решения задачи в сечении $s = 0,5l$ по длине цилиндра.

На рис. 12 показаны графики распределения перемещений u_γ для интервала $[0; \pi/4]$ изменения координаты ψ в зависимости от изменения толщины цилиндра для поверхности отсчета при $\gamma = 0$ (поскольку изменение перемещений по толщине цилиндра не превышает 1%). Из графиков видно как изменяется перемещение при переходе от вершины гофра $\psi = 0$ к его впадине $\psi = \pi/4$. Если перераспределение перемещений в вершине гофра с изменением толщины незначительно, то в его впадине наблюдается существенное изменение перемещений.

Максимальных значений перемещения достигают во впадине гофров при толщине $h = 4$. С увеличением толщины, жесткость цилиндра увеличивается, что приводит к снижению величины перемещений u_γ в 1,8; 3,0; 6,1 раза для $h = 5, 6, 8$, соответственно.

На рис. 13 показаны графики распределения максимальных напряжений σ_ψ на внешней (штриховая линия) и на внутренней (сплошная линия) поверхностях цилиндра в интервале $0 \leq \psi \leq \pi/4$ при

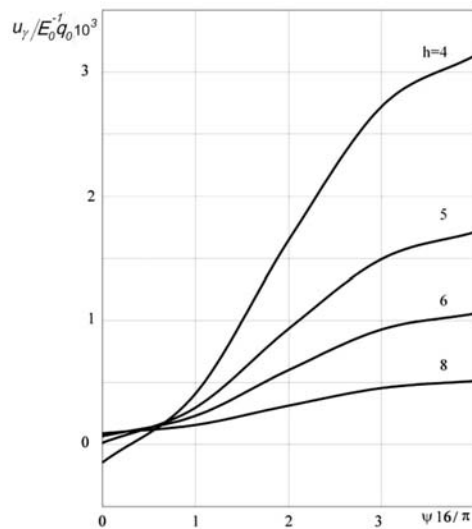


Рис. 12

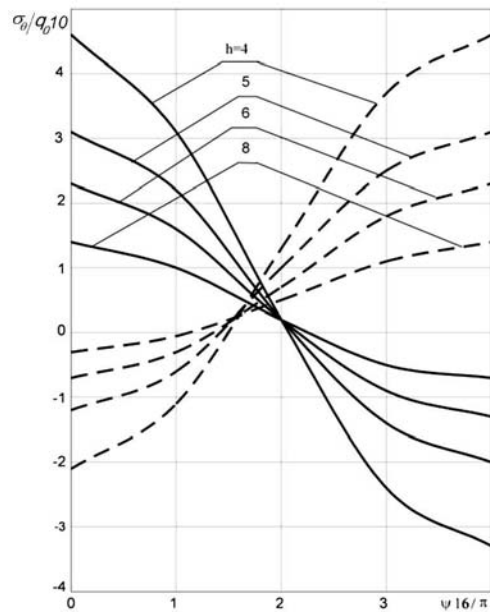


Рис. 13

тех же значениях параметров. Из графиков видно, что максимального своего значения напряжения σ_ψ достигают на внутренней поверхности в вершине гофра и на внешней – во впадине гофра. Если на внутренней поверхности цилиндра в вершине гофра имеют место напряжения положительного знака, а во впадине – отрицательного, то на внешней поверхности наблюдается противоположная картина распределения напряжений.

б) *Трансверсально-изотропные.* Рассмотрим задачу о напряженном состоянии полых трансверсально-изотропных цилиндров с гофрами в поперечном сечении толщины h . Задача решена при следующих исходных данных: $r_0 = 40$; $l = 60$; $h = 2, 2,5, 3$; $E = E_0$; $E' = 0,2E_0$; $\nu = 0,2$; $\nu' = 0,6$; $G' = 0,1E_0$; $\alpha = 0,4$; $m = 4$. При этом следует отметить, что хотя отношение толщины цилиндра к радиусу среднего круга h/r_0 невелико, отношение толщины h к радиусу кривизны R_ψ в некоторых зонах цилиндра становится довольно значительным. Так, в частности, при $\psi = 0$ для $m = 4$ радиус кривизны $R_\psi \approx 18$, а для $m = 8 - R_\psi \approx 6,45$.

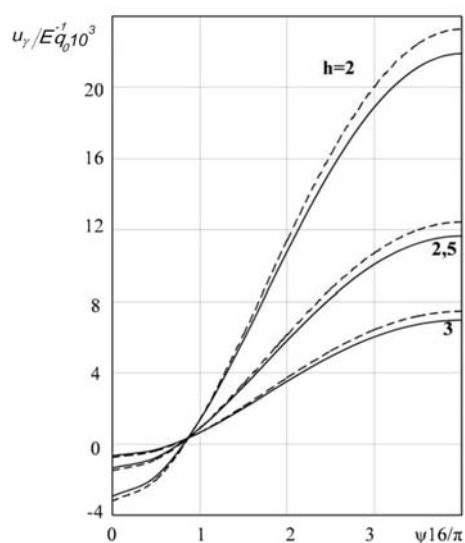


Рис. 14

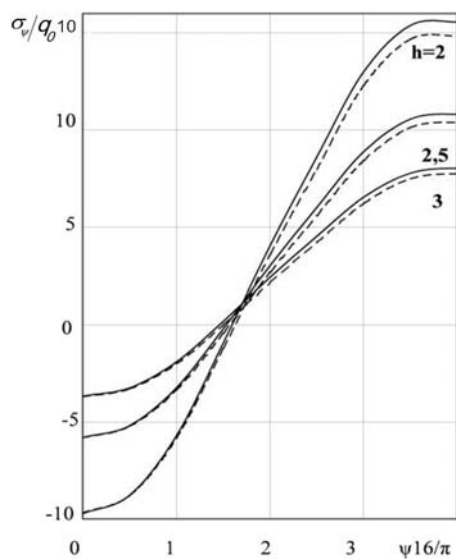


Рис. 15

Тогда отношение h/R_ψ для данных значений толщины изменяется в пределах $0,11 - 0,17$ и $0,31 - 0,46$. Таким образом, данную задачу уже следует решать на основании пространственной теории упругости.

На рис. 14, 15 в виде графиков даны результаты решения задачи для трансверсально-изотропного (штриховая линия) и изотропного (сплошная линия) цилиндров в сечении $s = 0,5l$ на внешней поверхности $\gamma = \gamma_2$ цилиндра. Для изотропного материала принималось: $E = E_0$; $\nu = 0,3$.

На рис. 14 показаны графики распределения перемещений u_ψ на интервале $0 \leq \psi \leq \pi/4$ в зависимости от изменения толщины h цилиндра. Из графиков видно как изменяются перемещения при переходе от вершины гофра $\psi = 0$ к впадине $\psi = \pi/4$ и какое отличие вносит учет трансверсальной изотропии для различных толщин.

На рис. 15 показаны графики распределения напряжений σ_ψ на интервале $0 \leq \psi \leq \pi/4$ в зависимости от изменения толщины h цилиндра. В вершине гофра ($\psi = 0$) напряжения σ_ψ невелики и в зависимости от толщины меняются незначительно, в то время как во впадине ($\psi = \pi/4$) напряжения меняют знак и значительно увеличиваются. Также видно отличие значений напряжений для изотропного и трансверсально-изотропного цилиндров.

в) *Ортотропные*. Проведем исследование напряженного состояния ортотропных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении в зависимости от амплитуды гофрировки. Задача решена при таких исходных данных: $r_0 = 60$; $l = 40$; $m = 4$; $\alpha = 2; 4; 6; 8$.

Для ортотропного материала принимаем следующие значения механических параметров: $E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$.

На рис. 16 приведены графики распределения нормального перемещения u_γ срединной поверхности цилиндра при различных значениях амплитуды гофра $\alpha = 2, 4, 6, 8$ в сечении $s = l/2$. Из рис. 16 видно, что при $\alpha = 2, 4, 6$, т.е. с возрастанием выпуклости гофра, величина прогиба в основном увеличивается, что свидетельствует о большей сопротивляемости действию прилагаемой нагрузки.

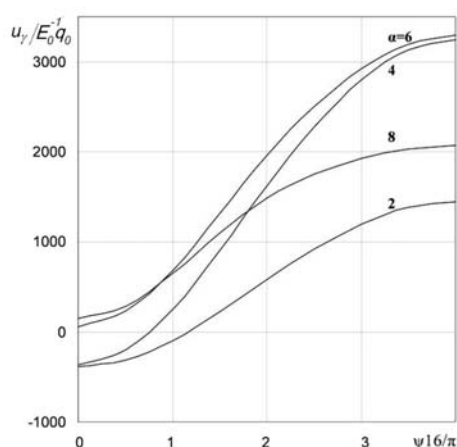


Рис. 16

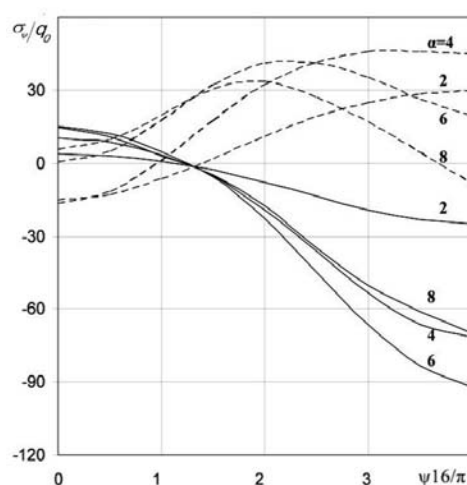


Рис. 17

На рис. 17 показаны графики распределения напряжений σ_ψ на внешней (штриховая линия) и внутренней (сплошная линия) поверхностях цилиндра при различных значениях амплитуды $\alpha = 2, 4, 6, 8$. Так, в случае $\alpha = 2$ на внутренней поверхности цилиндров напряжения распределяются более плавно, чем при $\alpha = 4, 6, 8$. На внешней поверхности цилиндра более плавно распределяются напряжения при $\alpha = 2, 4$.

3.2. Слоистые цилиндры. Рассмотрим задачу о напряженном состоянии трехслойных полых цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Внутренний и внешний слои – изотропные, толщина каждого слоя h , модуль упругости $E = E_0$ и коэффициент Пуассона ν . Средний слой имеет толщину H и может быть изготовлен из различных материалов.

а) *Изотропные, неоднородные слои*. Пусть средний слой изготовлен из изотропного материала с модулем упругости $E = dE_0$ и коэффициентом Пуассона ν . Результаты решения задачи приведены в табл. 3, 4 в среднем сечении по длине цилиндра для $s = 0,5l$. При решении задачи принималось: $h = 2$; $H = 4$; $r_0 = 40$; $l = 60$; $d = 1; 0,1$; $m = 4$; $\alpha = 2, 3$; $\nu = 0,3$.

В табл. 4 приведены значения перемещений u_γ , а в табл. 5 – напряжений σ_ψ для некоторых значений по толщине цилиндра в вершинах ($\psi = 0$) и во впадинах ($\psi = \pi/4$) гофров для значения $d = 0,01; 0,1$. Для сравнения, представлены значения напряжений и перемещений в однородном изотропном цилиндре ($d = 1$).

Таблица 4

α	γ / H	$u_{\gamma} / E_0^{-1} q_0$					
		$d = 1$		$d = 0,01$		$d = 0,1$	
		$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$
2	-1/2	107,13	323,66	-306,83	1951,32	158,87	651,74
	-1/4	101,05	324,22	-313,15	1945,11	151,31	650,85
	0	97,47	322,19	-326,24	1841,48	145,77	637,34
	1/2	95,41	317,89	-361,81	1775,84	138,57	626,51
	1/4	94,54	311,14	-362,91	1766,52	135,51	617,27
3	-1/2	96,58	414,63	-379,05	2957,26	134,87	848,24
	-1/4	89,33	417,48	-385,14	2955,50	126,47	850,44
	0	85,80	416,71	-379,06	2844,19	124,54	838,95
	1/2	84,41	412,58	-407,78	2787,36	119,64	830,92
	1/4	84,59	404,56	-408,78	2778,22	117,47	820,70

Таблица 5

α	γ / H	σ_{ψ} / q_0					
		$d = 1$		$d = 0,01$		$d = 0,1$	
		$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$
2	-1/2	9,61	-1,50	17,71	-0,94	15,46	-0,12
	-1/4	6,47	1,32	0,35	0,13	0,83	0,33
	0	4,14	3,86	0,32	0,17	0,67	0,50
	1/2	2,17	6,36	7,56	6,36	6,18	7,82
	1/4	0,35	9,08	1,42	15,85	2,13	14,07
3	-1/2	12,21	-4,15	21,80	-5,66	18,84	-4,07
	-1/4	7,44	-0,26	0,39	0,061	0,92	0,16
	0	4,03	3,40	0,36	0,13	0,71	0,43
	1/2	1,23	7,16	7,48	4,82	5,57	7,34
	1/4	-1,33	11,44	-0,94	19,86	-0,02	17,25

б) *Трансверсально-изотропный средний слой.* Рассмотрим напряженное состояние гофрированных в поперечном сечении полых цилиндров с трансверсально-изотропным средним слоем. Задача решена при таких исходных данных: $r_0 = 40$; $l = 60$; $H = 4$; $h = 2$; $m = 4$; $\alpha = 4$ $E = E_0$; $E' = 0,2E_0$; $\nu = 0,2$; $\nu' = 0,6$; $G' = 0,1E_0$.

В табл. 6 приведены результаты решения задачи в среднем сечении по длине цилиндра для значений перемещений u_{γ} и напряжений σ_{ψ} для некоторых значений толщины и направляющей цилиндра.

Таблица 6

$u_{\gamma}, \sigma_{\psi}$	γ / H	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 8$	$\psi = \pi / 4$
$u_{\gamma} / E_0^{-1} q_0$	-1/2	90,04	382,11	627,29
	-1/4	83,51	381,91	634,65
	0	43,61	356,75	630,16
	1/2	24,46	327,03	598,51
	1/4	29,15	324,94	592,20
σ_{ψ} / q_0	-1/2	15,78	2,54	-6,80
	-1/4	10,52	4,59	0,66
	0	6,72	5,44	4,51
	1/2	-0,78	3,70	6,06
	1/4	-4,74	4,20	14,20

Из табл. 6 видно, что в гофрированных в поперечном сечении цилиндрах, имеющих трансверсально-изотропный средний слой значения перемещений на внешней поверхности уменьшаются по сравнению с перемещениями на внутренней поверхности

сти в 3 раза в зоне вершины гофра $\psi = 0$. В зоне впадины гофра $\psi = \pi / 4$ распределение перемещений более плавное, при этом максимальных значений перемещения достигают на границе внутреннего и среднего слоев. Напряжения при переходе от внутреннего слоя к внешнему уменьшаются, меняя знак на противоположный в 3 раза в сечении $\psi = 0$ и увеличиваются примерно в 2 раза в сечении $\psi = \pi / 4$.

в) *Ортотропный средний слой.* Пусть средний слой изготовлен из ортотропного материала с механическими параметрами $E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$. При решении задачи принималось: $h = 2$; $H = 4$; $r_0 = 40$; $l = 60$; $d = 1; 0,1; m = 4$; $\alpha = 2,3$; $\nu = 0,3$.

Таблица 7

α	γ/H	$u_\gamma/E_0^{-1}q_0$		σ_ψ/q_0	
		$\psi=0$	$\psi=\pi/4$	$\psi=0$	$\psi=\pi/4$
2	-1/2	40,22	239,35	1,04	-3,60
	-1/4	34,87	239,66	-1,17	-6,08
	0	28,45	238,27	-0,34	-0,69
	1/4	25,78	229,90	-0,29	2,18
	1/2	26,03	224,54	-0,25	4,10
3	-1/2	32,70	325,05	1,78	-5,36
	-1/4	26,38	327,32	0,46	-8,75
	0	19,34	328,74	0,10	-1,40
	1/4	17,81	319,96	-0,10	2,66
	1/2	19,07	313,27	-0,70	5,43

В табл. 7 приведены значения перемещений u_γ и напряжений σ_ψ в среднем сечении по длине цилиндра в сечениях $\psi = 0$ и $\psi = \pi / 4$ по толщине цилиндра для значений величины амплитуды гофров $\alpha = 2,3$. С увеличением амплитуды гофров, значения перемещений уменьшаются в 1,2 – 1,36 раза по толщине в вершине гофра и увеличиваются в 1,35 – 1,4 раза во впадине. Напряжения σ_ψ достигают своего максимального значения в сечении $\psi = \pi / 4$ на границе слоев внутреннего несущего и среднего ортотропного и с увеличением амплитуды гофра увеличиваются в 1,4 раза.

§4. Полые цилиндры с эллиптическим гофрированным поперечным сечением.

Рассмотрим задачу о напряженном состоянии полого цилиндра с гофрированным эллиптическим поперечным сечением, находящимся под действием равномерной нагрузки, приложенной на внутренней либо на внешней поверхности. Направляющая поверхности отсчета задается в полярной системе координат в виде

$$\rho(\psi) = \frac{r_0}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m\psi \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi),$$

где α – амплитуда; m – частота гофрировки.

Тогда имеют место формулы

$$H_2(\psi, \gamma) = [1 + \gamma / R(\psi)]\omega(\psi)$$

$$\left(R(\psi) = \frac{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}; \quad \omega(\psi) = [\rho^2 + (\rho')^2]^{1/2}; \right.$$

$$\left. \rho' = - \left[\frac{r_0 e^2 \sin 2\psi}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}} + \alpha m \sin m\psi \right]; \quad e = 2\sqrt{\Delta} / (1 + \Delta); \right.$$

$$\rho'' = - \left\{ \frac{r_0 e^2}{2} \left[\frac{2 \cos 2\psi}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{3/2}} - \frac{3e^2 \sin^2 2\psi}{2(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{5/2}} \right] + \alpha m^2 \cos m\psi \right\}.$$

Здесь $R(\psi)$ – радиус кривизны поверхности отсчета; e – эксцентриситет эллипса.

4.1. Однослойные цилиндры. а) *Изотропные.* Проведем исследование влияния толщины и степени эллиптичности на напряженное состояние эллиптических цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Задача решена при следующих исходных данных: $r_0 = 40$; $l = 60$; $h = 4, 5$; $\alpha = 4$; $m = 4$; $\Delta = 0, 0, 2$.

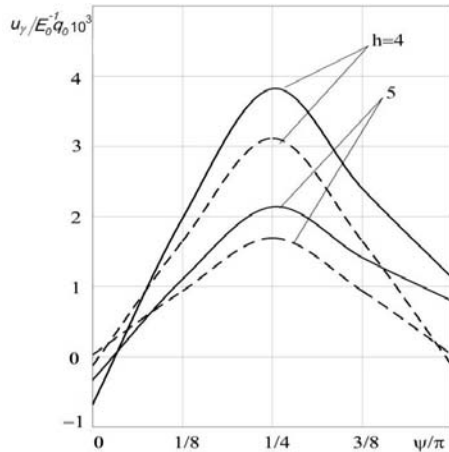


Рис. 18

Результаты решения задачи в сечении $s = 0,5l$ для перемещений u_y приведены на рис. 18, а для напряжений σ_ψ – в табл. 8. На рис. 18 значения перемещений для $\Delta = 0$ обозначены штриховой, а для $\Delta = 0,2$ – сплошной кривыми.

Из графиков распределения перемещений u_y по направляющей в интервале $0 \leq \psi \leq \pi/2$ (с учетом симметрии), приведенных на рисунке, видно, что в цилиндре с гофрированным эллиптическим поперечным сечением ($\Delta = 0,2$) в отличие от кругового ($\Delta = 0$), значения напряжений в окрестности большей жесткости ($\psi = 0$) убывают, а в окрестности меньшей жесткости ($\psi = \pi/2$) возрастают. Также возрастают значения перемещений в вогнутой части гофра ($\psi = \pi/4$).

Из табл. 8 следует, что значения напряжений σ_ψ в окрестности большей жесткости ($\psi = 0$) в цилиндре с гофрированным эллиптическим поперечным сечением изменяются незначительно по сравнению с круговым, а в окрестности меньшей жесткости ($\psi = \pi/2$) увеличиваются на 20% для $h = 4$ и $h = 5$.

Таблица 8

h	Δ	σ_ψ / q_0					
		γ / h	$\psi = 0$	$\psi = \pi / 8$	$\psi = \pi / 4$	$\psi = 3\pi / 8$	$\psi = \pi / 2$
4	0	-1/2	46,1	2,62	-31,9	2,62	46,1
		0	8,83	7,86	5,06	7,86	8,83
		1/2	-20,8	12,6	45,3	12,6	-20,8
	0,2	-1/2	44,5	1,87	-33,4	-2,27	55,8
		0	6,58	8,19	6,40	5,99	8,54
		1/2	-22,4	13,8	50,22	13,8	-27,4
5	0	-1/2	31,5	2,69	-19,4	2,69	31,5
		0	6,85	6,13	4,26	6,13	6,85
		1/2	-11,6	9,16	30,6	9,16	-11,6
	0,2	-1/2	31,6	1,99	-20,9	-0,48	37,8
		0	5,18	6,05	5,06	5,35	7,07
		1/2	-13,7	9,59	34,4	10,8	-14,9

б) *Трансверсально-изотропные.* Проведем анализ напряженного состояния полых ортотропных цилиндров с гофрированным поперечным сечением, находящихся под действием внешней нормальной нагрузки $q = q_0 \sin(\pi s / l)$ ($q_0 = \text{const}$) в зависимости

от изменения степени эллиптичности Δ и механический параметров материала. Задача решена при следующих исходных данных: $l = 40$, $r_0 = 40$; $h = 3$, $\Delta = 0,1; 0,3$, $m = 4$, $\alpha = 4$, механические характеристики четырех вариантов ортотропии цилиндров $\nu_{s\gamma} = \nu_{\psi\gamma} = 0,405$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $E_s = E_\psi = 1,68E_0$; $2,68E_0$; $3,68E_0$; $4,68E_0$; $G_{s\gamma} = G_{\psi\gamma} = 0,45E_0$.

На рис. 19 приведены графики распределения нормального перемещения u_γ в сечении $s = 0,5L$ на внешней поверхности цилиндра на интервале $0 \leq \psi \leq \pi/2$ для четырех вариантов ортотропного материала, обозначенных номерами 1, 2, 3, 4; $\Delta = 0,1$ (сплошная линия) и $\Delta = 0,3$ (пунктирная линия).

Из рис. 19 видно, что в вершине гофра и большей полуоси эллипса ($\psi = 0$) перемещения u_γ направлены в сторону, противоположную действию приложенной нагрузки, а в зоне впадины гофра ($\psi = \pi/4$) перемещения u_γ достигают максимальных значений. В зоне малой полуоси эллипса ($\psi = \pi/2$) перемещения u_γ при малой степени эллиптичности ($\Delta = 0,1$) близки к нулю для всех четырех вариантов ортотропии. При большей степени эллиптичности ($\Delta = 0,3$) максимальные значения u_γ ($\psi = \pi/4$) увеличиваются до 18%, а в зоне малой полуоси эллипса ($\psi = \pi/2$) u_γ отличны от нуля. Это можно объяснить тем, что при $\Delta = 0,3$ имеет место большая податливость цилиндра. При этом максимальные перемещения u_γ ($\psi = \pi/4$) для первого и четвертого варианта ортотропии отличаются в 2,7 раза, а при $\Delta = 0,3$ – в 3,1 раза.

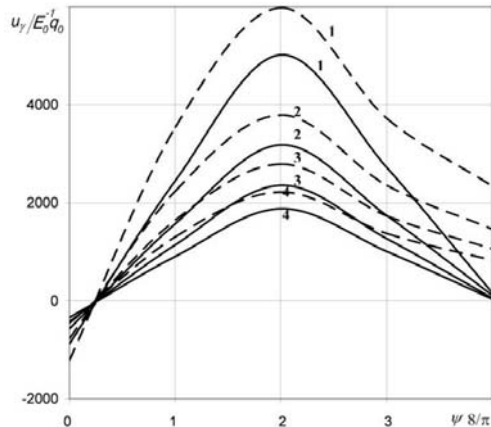


Рис. 19

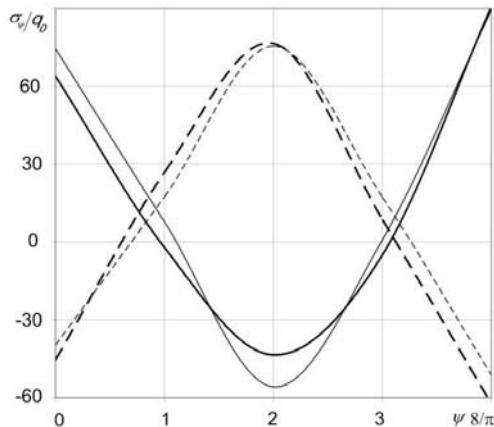


Рис. 20

На рис. 20 приведены графики распределения напряжений σ_ψ^\pm вдоль направляющей цилиндра в интервале ($0 \leq \psi \leq \pi/2$) на внутренней (сплошная линия) и внешней (штриховая линия) поверхностях цилиндра в сечении $s = 0,5L$ для степени эллиптичности $\Delta = 0,1$ (тонкая линия) и $\Delta = 0,3$ (жирная линия). Для всех четырех вариантов ортотропии графики напряжений практически совпадают. Из приведенных на рис. 20 графиков можно заключить, что изменение степени эллиптичности незначительно сказывается на значениях напряжений. Распределение напряжений почти симметрично относительно середины интервала ($\psi = \pi/4$). Напряжения на внутренней поверхности на краях интервала ($\psi = 0; \psi = \pi/2$) примерно достигают той же величины, что и в центре ($\psi = \pi/4$). Напряжения на внешней поверхности сдвигаются вверх. Также наблюдается некоторая симметрия напряжений на внешней и внутренней поверхности цилиндра относительно горизонтальной линии на небольшом расстоянии в

положительную сторону от нуля. Таким образом, гофрировка цилиндра приводит к тому, что в зоне выпуклости гофров напряжения по величине близки к напряжениям в зоне вогнутости.

в) *Ортотропные*. Проведем исследование напряженного состояния полых эллиптических цилиндров с гофрами в поперечном сечении, изготовленных из ортотропного материала. Задача решена при таких исходных данных: $r_0 = 40$, $l = 60$, $h = 4$, $m = 4$, $\alpha = 4$; $\Delta = 0; 0,1; 0,2$; $E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$.

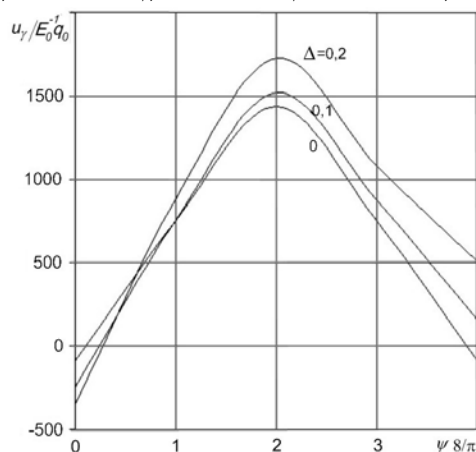


Рис. 21

Результаты решения задачи приведены в среднем сечении по длине цилиндра на рис. 21 для значений перемещений u_γ и в табл. 9 для значений напряжений σ_ψ .

На рис. 21 представлены графики распределения перемещений u_γ по направляющей цилиндра. Из графиков видно, что в случае, когда $\Delta \neq 0$ значения перемещений увеличиваются по сравнению с круговым гофрированным цилиндром во впадине гофров ($\psi = \pi/4$) в 1,1 – 1,2 раза, в вершине, соответствующей большей полуоси эллипса ($\psi = 0$) в 2,8 – 4 раза и в вершине гофра, соответствующей меньшей полуоси эллипса ($\psi = \pi/2$) в 1,8 – 5,8 раз, при чем в последнем случае меняя знак на противоположный.

соответствующей меньшей полуоси эллипса ($\psi = \pi/2$) в 1,8 – 5,8 раз, при чем в последнем случае меняя знак на противоположный.

Таблица 9

Δ	γ / H	σ_ψ / q_0				
		$\theta = 0$	$\theta = \pi/8$	$\theta = \pi/4$	$\theta = 3\pi/8$	$\theta = \pi/2$
0	-1/2	50,96	4,22	-32,39	4,22	50,96
	0	9,20	8,87	5,62	8,87	9,20
	1/4	-23,80	12,06	48,78	12,06	-23,80
0,1	-1/2	48,12	5,36	-32,58	2,06	55,91
	0	8,37	9,35	5,96	7,94	9,46
	1/4	-22,36	11,78	49,95	12,44	-27,52
0,2	-1/2	47,66	3,90	-31,95	0,03	60,17
	0	6,73	9,47	6,99	6,28	8,68
	1/4	-23,58	13,17	52,21	11,43	-32,17

В табл. 9 представлены значения напряжений σ_ψ для некоторых значений по толщине и направляющей цилиндра.

Из табл. 9 видно, что наличие эллиптичности приводит к уменьшению максимальных значений напряжений σ_ψ в 1,1 раза в зоне $\psi = 0$ на внутренней поверхности цилиндра и к увеличению в 1,1 – 1,2 раза в сечении $\psi = \pi/4$ на внешней поверхности и в сечении $\psi = \pi/2$ – на внутренней.

4.2. Слоистые цилиндры. Рассмотрим задачу о напряженном состоянии трехслойных полых эллиптических цилиндров с гофрами в поперечном сечении. Внутренний и внешний слои – изотропные, толщина каждого слоя h , модуль упругости $E = E_0$ и коэффициент Пуассона ν . Средний слой имеет толщину H и может быть изготовлен из различных материалов.

а) *Изотропные, неоднородные слои.* Пусть средний слой изготовлен из изотропного материала с модулем упругости $E = dE_0$ и коэффициентом Пуассона ν . При решении задачи принималось: $h = 2$; $H = 4$; $\Delta = 0,1$; $0,2$; $r_0 = 40$; $l = 60$; $d = 1$; $0,1$; $m = 4$; $\nu = 0,3$. Результаты решения задачи приведены для перемещений u_γ в табл. 10 и для напряжений σ_ψ в табл. 11 в среднем сечении по длине цилиндра для $s = 0,5l$.

Таблица 10

Δ	γ / H	$u_\gamma / E_0^{-1} q_0$					
		$d = 1$			$d = 0,1$		
		$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = \pi / 2$
0,1	-1/2	7,08	457,92	219,08	-17,36	927,52	343,43
	-1/4	-0,08	461,30	211,48	-25,28	930,45	334,51
	0	-2,84	460,78	207,19	-24,29	919,55	331,04
	1/2	-3,01	456,60	204,59	-25,70	912,01	322,96
	1/4	-1,29	448,15	203,23	-25,55	901,38	318,18
0,2	-1/2	-62,00	583,15	389,94	-138,64	1150,66	635,33
	-1/4	-69,43	588,03	381,92	-146,19	1155,70	626,09
	0	-71,28	588,27	376,88	-139,93	1146,6	621,63
	1/2	-70,02	584,01	372,97	-136,74	1140,57	609,98
	1/4	-66,62	574,47	369,79	-134,33	1128,96	602,03

Таблица 11

Δ	γ / H	σ_ψ / q_0					
		$d = 1$			$d = 0,1$		
		$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = \pi / 2$	$\theta = 0$	$\theta = \pi / 4$	$\theta = \pi / 2$
0,1	-1/2	12,54	-4,54	12,83	18,97	-4,61	19,99
	-1/4	7,27	-0,45	7,94	0,94	0,15	0,90
	0	3,51	3,44	4,56	0,66	0,44	0,77
	1/2	0,47	7,45	1,78	4,19	7,55	7,01
	1/4	-2,24	12,02	-0,82	-1,40	17,97	0,81
0,2	-1/2	14,08	-5,56	13,92	20,81	-6,01	21,67
	-1/4	7,47	-0,93	8,48	0,97	0,10	0,83
	0	2,96	3,54	4,98	0,64	0,45	0,80
	1/2	-0,57	8,21	2,14	2,82	8,04	8,38
	1/4	-3,63	13,56	-0,58	-3,41	19,80	1,26

Из табл. 10 видно, что наличие слабого среднего слоя ведет к существенному перераспределению значений перемещений при увеличении степени эллиптичности гофрированных цилиндров. Так, в зоне большей полуоси эллипса, совпадающей с вершиной ($\psi = 0$) гофра, значения перемещений имеют противоположный действию нагрузки знак и увеличиваются в 5,4 раза для $\Delta = 0,2$, в зоне впадины гофра ($\psi = \pi / 4$) перемещения u_γ принимают свои максимальные значения и увеличиваются в 2 раза по сравнению с изотропными цилиндрами как для $\Delta = 0,1$, так и для $\Delta = 0,2$. В зоне, совпадающей с впадиной гофра ($\psi = \pi / 4$) наличие среднего слоя приводит к увеличению значений перемещений в 1,6 раза.

Напряжения σ_ψ (табл. 11) принимают максимальные значения на внутренней поверхности цилиндра в зоне меньшей полуоси эллипса $\psi = \pi / 2$ и наличие среднего неоднородного слоя приводит к увеличению их значений в 1,6 раза.

б) *Трансверсально-изотропный средний слой.* Рассмотрим случай, когда средний слой изготовлен из трансверсально-изотропного материала с механическими параметрами $E = E_0$; $E' = 0,2E_0$; $\nu = 0,2$; $\nu' = 0,6$; $G' = 0,1E_0$.

При решении задачи принималось: $r_0 = 40$; $l = 60$; $m = 4$; $\alpha = 4$; $h = 2$; $H = 4$; $\Delta = 0,1$; $0,2$. На рис. 22 представлены результаты решения задачи в виде графиков

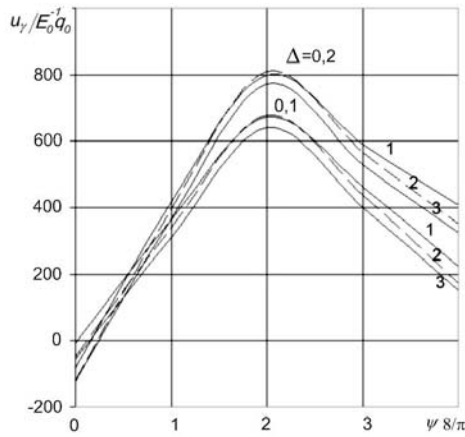


Рис. 22

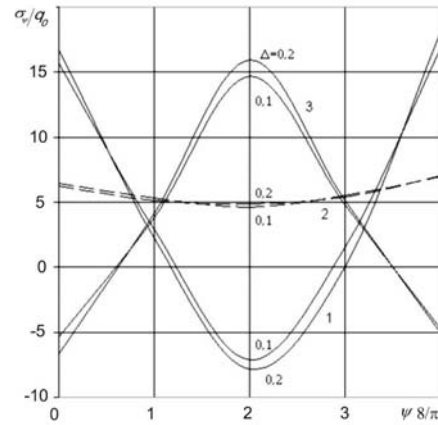


Рис. 23

распределения перемещений u_γ и на рис. 23 – для значений напряжений σ_ψ по направляющей цилиндра в среднем сечении по длине цилиндра.

Сплошной линией обозначены графики перемещений и напряжений на внешней (1) и внутренней (3) поверхностях, а штриховой (2) – в среднем сечении по толщине. Из рис. 22 видно, что с увеличением степени эллиптичности значения перемещений увеличиваются в 1,2 раза в сечении $\psi = \pi/4$ и в 1,8 раза в сечении $\psi = \pi/2$. При этом значения напряжений (рис. 23) меняются незначительно.

в) *Ортотропный средний слой.* Пусть средний слой изготовлен из ортотропного материала с механическими параметрами $E_s = 3,68E_0$; $E_\psi = 2,68E_0$; $E_\gamma = 1,1E_0$; $\nu_{s\psi} = 0,105$; $\nu_{s\gamma} = 0,405$; $\nu_{\psi\gamma} = 0,431$; $G_{s\psi} = 0,5E_0$; $G_{s\gamma} = 0,45E_0$; $G_{\psi\gamma} = 0,41E_0$.

Таблица 12

α	γ/H	$u_\gamma / E_0^{-1} q_0$					
		ψ					
		0		$\pi/4$		$\pi/2$	
		Δ					
		0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2
2	-1/2	-34,71	-94,98	275,01	380,34	139,22	276,73
	-1/4	-40,18	-100,77	275,71	382,16	133,78	271,16
	0	-45,44	-104,94	274,71	382,43	126,02	261,85
	1/4	-45,54	-102,25	265,87	372,42	120,71	253,47
	1/2	-44,10	-99,42	260,08	365,44	119,84	251,37
3	-1/2	-35,93	-88,71	360,26	461,19	127,28	261,38
	-1/4	-42,18	-95,15	362,96	465,12	120,66	254,42
	0	-47,97	-99,84	364,98	468,94	112,06	243,96
	1/4	-47,19	-96,60	355,97	459,47	108,10	237,05
	1/2	-44,96	-93,20	348,92	451,51	108,47	236,38

Результаты решения задачи приведены для перемещений u_γ в табл. 12 и для напряжений σ_ψ в табл. 13 в среднем сечении по длине цилиндра для $s = 0,5l$.

Из табл. 12 видно, что максимальных значений перемещения достигают в зоне впадины гофров ($\psi = \pi/4$) и с увеличением степени эллиптичности область максимума перемещений сдвигается к середине толщины цилиндра ($\gamma = 0$). При увеличении амплитуды гофрировки значения перемещений увеличиваются в 1,2 – 1,3 раза.

Характер распределения напряжений σ_ψ представлен в табл. 13. Максимальных значений напряжения σ_ψ достигают также в зоне впадины гофров и с увеличением амплитуды гофрировки увеличиваются в 1,3 – 1,4 раза. Их максимум приходится на зону границы внутреннего несущего и среднего ортотропного слоев.

Таблица 13

α	γ/H	σ_ψ / q_0					
		ψ					
		0		$\pi/4$		$\pi/2$	
		Δ					
		0,1	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2
2	-1/2	1,55	2,13	-4,10	-5,59	0,51	-0,18
	-1/4	-1,05	-1,14	-6,88	-9,33	-1,47	-1,95
	0	-1,62	-2,85	-0,75	-1,06	1,18	3,23
	1/4	-0,81	-1,7	2,42	3,05	1,12	2,45
	1/2	-1,61	-2,93	4,59	5,98	1,29	3,30
3	-1/2	2,14	2,62	-5,89	-7,44	1,48	1,10
	-1/4	-0,54	-0,63	-9,69	-12,52	-0,34	-0,08
	0	-1,23	-2,30	-1,61	-2,36	1,92	4,60
	1/4	0,93	-1,71	2,84	3,30	0,91	2,29
	1/2	-1,90	-3,04	5,87	7,05	0,76	2,77

Заключение.

В настоящей статье представлен обзор публикаций и дано решение некоторых новых классов задач о напряженном состоянии некруговых полых цилиндров, находящихся под действием нагрузки, приложенной на боковых поверхностях цилиндров при определенных граничных условиях на торцах. Для решения данного класса задач используется подход, основанный на применении рядов Фурье, заданных на дискретном множестве точек. Проведен анализ напряженного состояния некруговых полых цилиндров различной структуры в зависимости от формы поперечного сечения и механических свойств материала.

Проведенный анализ позволяет заключить, что применение данного метода дает возможность решать задачи о напряженном состоянии полых цилиндров с некруговым поперечным сечением в широком диапазоне изменения их геометрических и механических параметров, с достаточной степенью точности.

РЕЗЮМЕ. На основі підходу, що базується на застосуванні рядів Фур'є для функцій, заданих на дискретній множині точок, розв'язано задачі про напружений стан некругових порожнистих циліндрів в залежності від форми поперечного перерізу та механічних властивостей матеріалу. Наведено результати дослідження напруженого стану у вигляді графіків та таблиць і дано їх аналіз.

1. Гузь А.Н., Немин Ю.Н. Статика упругих тел неканонической формы. – К.: Наук. думка, 1984. – 300 с. (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6-ти т.; Т.2).
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
3. Chang M., Chang L.-L. Analysis of the eccentric cylindrical thin shell // Appl. Math. and Mech. Engl. Ed. – 1994. – 15, N 9. – P. 887 – 895.
4. Grigorenko Ya. M., Grigorenko A.Ya., Static and Dynamic Problems for Anisotropic Inhomogeneous Shells with Variable Parameters and Their Numerical Solution (Review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – 49, N 2. – P. 123 – 197.
5. Grigorenko Ya. M., Rozhok L. S. Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section // J. Eng. Math. – 2006. – 54. – P. 145 – 157.

6. *Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S.* Influence of curvature on the stress state of hollow cylinders with complex-shaped noncircular cross-section // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 7. – P. 737 – 743.
7. *Grigorenko Ya. M., Yaremchenko S. N.* Refined design of longitudinally corrugated cylindrical shells // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 2. – P. 205 – 212.
8. *Hamming R.W.* Numerical Methods for Scientists and Engineers. – New-York: Mc Graw-Hill, 1962. – 400 p.
9. *Korn G.A., Korn T.M.* Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. – New-York: Mc Graw-Hill, 1961. – 720 p.
10. *Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // *Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, N 6. – P. 613 – 687.
11. *Meyers C.A., Hyer M.W.* Response of elliptical composite cylinders to internal pressure loading // *Mech. Comp. Math. Struct.* – 1997. – **4**. – P. 317 – 343.
12. *Nzengwa R., Tagne Simo B.H.* A two-dimensional model for linear elastic thick shells // *Int. J. Solids and Struct.* – 1999. – **36**, N 34. – P. 5141 – 5176.
13. *Sokolnikoff I.S., Specht R.D.* Mathematical Theory of Elasticity. – New-York: Mc Graw-Hill, 1946. – 373 p.
14. *Soldatos K. P.* Mechanics of Cylindrical Shells with Noncircular Cross-Section. A survey // *Appl. Mech. Rev.* – 1999. – **52**, N 8. – P. 237–274.
15. *Timoshenko S.P.* Theory of Elasticity. – New York: Mc Graw-Hill, 1934. – 452 p.
16. *Yu H.R., Liang B., Li L.* Optimal design of cylindrical shells // *Struct. Optimiz.* – 1991. – **3**, N 4. – P. 252 – 256.

Поступила 08.11.2010

Утверждена в печать 26.06.2013

