

В. П. Легеца<sup>1</sup>, Д. В. Легеца<sup>2</sup>

### О КОЛЕБАНИЯХ СТРУНЫ С ПОДВИЖНЫМ КОНЦОМ

<sup>1</sup> *Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,  
ул. Героев Оборона, 15, 03041, Киев, Украина, e-mail: Viktor.Legeza@gmail.com;*

<sup>2</sup> *Национальный технический университет Украины «КПИ»,  
пр-т Победы, 37, 03056, Киев, Украина, e-mail: Dmytro.Legeza@gmail.com*

**Abstract.** The natural vibrations of a string are studied, when the left end of string is fixed and the right end can move in a vertical plane according to some law. The used boundary conditions are substantiated. It is shown that the natural frequencies decrease insignificantly when the values of parameter of nonlinearity increase.

**Key words:** string, fixed and moving ends, natural and forced vibrations, moving boundary, wave equation, flutter.

#### Введение.

При исследованиях динамического поведения сложных технических систем с гибкими элементами или нитями возникает необходимость обоснования и решения новых краевых задач математической физики с подвижными границами. При этом указанная подвижность границ должна инструментально контролироваться и определенным образом подавляться (пассивно или активно); в противном случае это приводит к аварийным ситуациям в соответствующих технических системах.

При решении актуальных прикладных задач из области динамики гибких элементов (электрических проводов линий электропередач (ЛЭП), мостовых вантов, тросов, шахтных канатов, проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой и т.д.) ранее проведены теоретико-экспериментальные исследования динамической нагруженности нитей [1, 4, 9, 12, 16] различного назначения. При этом вынужденные колебания в тех или иных системах возникали под влиянием различных климатических воздействий (ветер, лед, сейсмика), кинематических и технологических воздействий.

В работе рассмотрены вынужденные колебания электрических проводов мощных линий электропередач (ЛЭП) под воздействием ветрового потока. При этом частоты основного тона собственных колебаний электрических проводов и гирлянд изоляторов лежат в низкочастотном диапазоне (1,0 – 12,0 рад/с) [1]. Оптимальное виброподавление вынужденных колебаний рассматриваемых упругих систем может быть достигнуто либо с применением различных виброгасителей, в том числе катковых [2, 3, 11, 13], либо при использовании оптимального управления за счет введения в систему элементов активной обратной связи [6, 8, 12, 14, 15].

Справочные работы [1] были направлены на решение практических вопросов и проблем обледенения электрических проводов и содержат результаты обработки экспериментальных исследований их влияния на динамическую нагруженность ЛЭП во время галопирования.

Динамическое поведение шахтных канатов как нитей переменной длины с негономными связями подробно исследовано в монографии [9]. Общие теоретические подходы к исследованиям вынужденных колебаний мостовых вантов для разных климатических условий широко освещены в литературе. В экспериментально-теоретических сообщениях [6, 8, 14, 15] предложены некоторые новые направления

управления активным демпфированием вынужденных колебаний мостовых вантов, поддерживающих растяжек-тросов высотных объектов и электрических проводов во время галопирования или флаттера. Природе такого явления, как галопирование электрических проводов и тросов и борьбе с ним посвящены работы [1 – 3 и др.].

Возникновение вынужденных колебаний указанных выше технических систем и их элементов с большими амплитудами представляет актуальную проблему (особенно в свете участвующих во всем мире природных катаклизмов последних лет), которую следует решать на основе их оптимального демпфирования.

Основной этап решения указанной проблемы – анализ частотных и резонансных особенностей соответствующих систем. Результаты такого частотного анализа должны в дальнейшем обеспечить: адекватность математической модели реальным колебательным системам (например, в виде ЛЭП); практические рекомендации и предложения по техническим решениям, которые бы существенно уменьшили максимальные амплитуды вынужденных колебаний проводов при галопировании, и, как конечный результат, эксплуатационную надежность технических систем с подвижными границами.

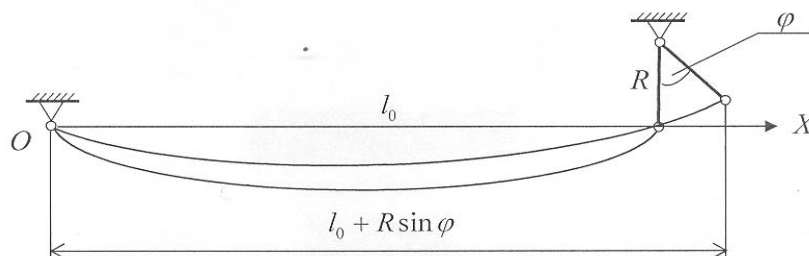
Известно [1], что продольные колебания точки подвеса электрического провода являются отрицательным фактором возникновения и усиления галопирования ЛЭП. С другой стороны, разные конструктивные решения по жесткому (неподвижному) закреплению двух точек подвеса провода относительно траверс опор ЛЭП приводят к резкому увеличению натяжения провода во время галопирующих колебаний и, как следствие, к его обрыву. Поэтому следует предложить те эффективные способы и устройства для виброподавления вынужденных колебаний подвижных точек подвеса проводов, которые уменьшили бы их продольные перемещения до оптимального уровня, но не делали их нулевыми.

Первый шаг в решении этой общей задачи состоит в исследовании влияния перемещения одной из точек подвеса электрического провода на частоту его собственных колебаний. Такая нелинейная задача моделирует колебания электрического провода в пролете между анкерной и промежуточной опорами ЛЭП, которые возникают вследствие галопирования или мгновенного сбрасывания ледового наложения при его плавлении. В дальнейшем будем отождествлять электрический провод с классической струной [1, 5 – 7].

### 1. Постановка задачи.

Рассмотрим свободные колебания струны, левый конец которой является неподвижным, а правый имеет возможность перемещаться в вертикальной плоскости по некоторому закону (см. рисунок). Представим краевые условия, которые имеют место во время колебаний струны в исследуемой задаче с учетом перемещения правой опоры.

Подвижная правая опора струны моделирует маятниковую подвеску электрического провода, которая представляет собой гирлянду изоляторов длиной до 3 – 4 метров. В свою очередь указанная гирлянда шарнирно закреплена к траверсе ЛЭП с возможностью свободного вращения относительно последней.



Очевидно, что перемещения правого конца струны взаимосвязаны с величиной амплитуды  $u(x; t)$  ее вертикальных колебаний. Наличие такой взаимосвязи и приводит к нелинейности этой задачи.

Поперечные колебания струны моделируем с помощью однородного волнового уравнения.

Постановку данной краевой задачи сформулируем таким образом: для однородного волнового дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

которое описывает собственные колебания струны, следует определить решение, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u(x; 0) = B \sin((\pi x)/l_0); \quad (2)$$

$$u'_t(x; 0) = 0 \quad (3)$$

и таким краевым условиям:

$$u(0; t) = 0; \quad (4)$$

$$u(l_0 + R \sin \varphi(t); t) = R(1 - \cos \varphi(t)); \quad (5)$$

$$u'_x(l_0 + R \sin \varphi(t); t) = \operatorname{tg}(\varphi(t)), \quad (6)$$

где  $l_0$  – расстояние между опорами по горизонтали перед началом колебаний;  $R$  – длина гирлянды изоляторов;  $\varphi(t)$  – угол, на который отклоняется гирлянда изоляторов в продольном направлении в процессе ее колебаний (положительное направление – против часовой стрелки);  $a^2 = T_0/\rho$ ;  $T_0$  – статическое натяжение струны;  $\rho$  – линейная плотность материала струны. Отметим, что в такой постановке задача о колебаниях струны рассматривается впервые.

Формула (4) отражает то, что левый конец струны является неподвижным. Формула (5) записана из того условия, что нижний конец гирлянды вместе с правым концом струны (электрического провода) совершает маятниковые колебания вокруг точки подвеса гирлянды изоляторов. Формула (6) отражает условие закрепления струны на правой опоре (касательная в точке крепления струны всегда совпадает с касательной к траектории перемещения нижней точки гирлянды (т. е. направлена по касательной к окружности с радиусом  $R$ ). Таким образом, правый конец струны всегда составляет с осью  $OX$  угол, равный  $\varphi(t)$ .

Отметим, что в данной работе исследуем собственные колебания струны (электрического провода), которые возникают, например, при мгновенном сбрасывании ледового наслонения во время его электрического плавления.

**Цель данного исследования** – обоснование краевых условий, которые имеют место во время колебаний струны в исследуемой задаче и оценить возможное изменение частоты собственных колебаний струны с учетом указанного выше перемещения правой опоры.

## 2. Преобразование основного уравнения и краевых условий.

Ниже представим исходное уравнение (1) и краевую задачу (2) – (6) в безразмерных переменных. В данной работе рассмотрим малые углы  $\varphi(t)$ , поэтому тригонометрические функции заменим таким образом:  $\operatorname{tg} \varphi \sim \varphi$ ,  $\sin \varphi \sim \varphi$ ,  $\cos \varphi \sim 1 - \varphi^2/2$ . После этого условия (5) – (6) принимают такой вид:

$$u(l_0 + R\varphi; t) = R(\varphi^2/2); \quad (7)$$

$$u'_x(l_0 + R\varphi; t) = \varphi. \quad (8)$$

Разложим в ряды Тейлора левые части соотношений (7) и (8) с удержанием тех членов, которые содержат вторую производную  $u''_{xx}(l_0; t)$  включительно. В результате получим два равенства

$$u(l_0; t) + R\varphi u'_x(l_0; t) + \frac{(R\varphi)^2}{2} u''_{xx}(l_0; t) = R \frac{\varphi^2}{2}; \quad (9)$$

$$u'_x(l_0; t) + R\varphi u''_{xx}(l_0; t) = \varphi. \quad (10)$$

Выразим вторую производную  $u''_{xx}(l_0; t)$  из (10) и подставим ее в (9). После преобразований получим формулы

$$u(l_0; t) = -\frac{R\varphi}{2} u'_x(l_0; t); \quad (11)$$

$$u'_x(l_0; t) = \varphi(1 - Ru''_{xx}(l_0; t)). \quad (12)$$

С использованием выражений (9) и (10) освободимся от переменной  $\varphi(t)$ :

$$u(l_0; t) = \frac{R}{2} \frac{[u'_x(l_0; t)]^2}{[Ru''_{xx}(l_0; t) - 1]}. \quad (13)$$

Введем в краевую задачу безразмерные переменные и новую искомую функцию:

$$\xi = x/l_0; \quad \tau = at/l_0; \quad u(x; t) = B \cdot V(\xi; \tau);$$

где  $B$  – условная амплитуда колебаний струны.

После преобразований краевую задачу формулируем так:

$$\frac{\partial^2 V(\xi; \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 V(\xi; \tau)}{\partial \xi^2}. \quad (14)$$

Краевые условия преобразуются к такому виду:

$$V(0; \tau) = 0, \quad (15)$$

$$V(1, \tau) = \frac{b}{2} \frac{[V'_\xi(1, \tau)]^2}{[bV''_{\xi\xi}(1, \tau) - 1]} \quad (b = (BR)/l_0^2). \quad (16)$$

Начальные условия будут иметь такой вид:

$$V(\xi; 0) = \sin(\pi\xi), \quad (17)$$

$$V'_\tau(\xi; 0) = 0. \quad (18)$$

Очевидно, что если правая опора также является неподвижной в продольном направлении, то  $b = 0$  и постановка краевой задачи (14) – (18) упрощается и сводится к классической задаче о колебаниях струны с неподвижными концами [5].

Таким образом, параметр  $b$  является той характеристикой, которая определяет уровень нелинейности исследуемой задачи. Увеличение параметра  $b$  равнозначно увеличению амплитуды колебаний электрического провода или уменьшению расстояния между опорами. Кроме того, следует отметить, что для электрических проводов ЛЭП, которые имеют место в действительности, параметр  $b$  изменяется, как правило, в таком диапазоне:  $0 \leq b \leq 0,05$ .

### 3. Решение краевой задачи.

Периодическое решение данной краевой задачи определим в следующем виде:

$$V(\xi; \tau) = z(\xi) \cos(\omega\tau), \quad (19)$$

где пространственная компонента  $z(\xi)$  с учетом дифференциального уравнения (14) и краевого условия (15) на левом конце принимает такой вид:

$$z(\xi) = \sin(\omega\xi). \quad (20)$$

Таким образом, решение поставленной задачи состоит в том, чтобы определить, насколько будет отличаться неизвестная круговая частота  $\omega$  от величины  $\pi$ .

Круговую частоту  $\omega$  определим так, чтобы решение (19) волнового уравнения (14) в среднеквадратическом приближении наилучшим образом удовлетворяло бы условию (16). Подставив выражение (19) в условие (16), после преобразований получим:

$$\Phi(\xi; \tau; \omega)|_{\xi=1} = 0 \quad (\Phi(\xi; \tau; \omega) = 2z(\xi) + b \cos(\omega \tau)[2z(\xi)z''(\xi) - z'^2(\xi)]). \quad (21)$$

Так как функция  $\Phi^2(\xi; \tau; \omega)$ , также как и функция  $\Phi(\xi; \tau; \omega)$ , является периодической по условному времени  $\tau$ , то осредним ее по периоду  $2\pi/\omega$ . На основе выражения (21) запишем интеграл осреднения

$$J(\xi; \omega) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \Phi^2(\xi; \tau; \omega) d\tau, \quad (22)$$

после интегрирования которого получим равенство

$$J(\xi; \omega) = 4z^2(\xi) + 0,5b^2[2z(\xi)z''(\xi) - z'^2(\xi)]^2. \quad (23)$$

Круговую частоту  $\omega$  будем определять из условия минимума выражения (23) на правом конце струны, то есть при  $\xi = 1$ . При этом функция  $J(\xi; \omega)$  при  $\xi = 1$  приобретает такой вид:

$$F(\omega) = J(\xi; \omega)|_{\xi=1} = 4\sin^2 \omega + 0,5b^2\omega^4(\sin^2 \omega + 1)^2. \quad (24)$$

Далее, приравнявая производную  $F'(\omega)$  функции (24) нулю, получим уравнение для определения круговой частоты  $\omega$ :

$$2b^2\omega^3(1 + \sin^2 \omega)^2 + [4 + b^2\omega^4(1 + \sin^2 \omega)]\sin 2\omega = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) относительно  $\omega$  решаем численными методами (в окрестности точки  $\omega = \pi$ ). Полученные результаты представлены в виде таблицы.

$b$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,1
$\omega$	3,142	3,141	3,140	3,138	3,136	3,133	3,129	3,125	3,120	3,116	3,111

Максимальное значение относительной погрешности приближенного решения (отношения величин  $J(\xi; \omega)|_{\xi=1}/J(\xi; \omega)|_{\xi=0,5}$ ) в указанном диапазоне для параметра  $b$  не превышает величины 0,01 (результаты здесь не приведены). Так как полученная погрешность является достаточно малой, то выражение (19) с учетом (20) для полученной частоты  $\omega$  основного тона колебаний струны можно с достаточным уровнем точности считать приближенным решением поставленной краевой задачи.

Так как частоты основного тона собственных колебаний гирлянд изоляторов электрических проводов лежат в низкочастотном диапазоне (1,0 – 12,0 рад/с) [1], то для оптимального виброподавления вынужденных колебаний и галопирования можно рекомендовать к использованию катковые гасители [2].

#### Заключение.

Анализ полученных результатов дает возможность сформулировать следующие выводы.

1. При  $b = 0$  собственные частоты колебаний электрического провода совпадают с собственными частотами при неподвижных его концах, а именно:

$$V(0; \tau) = 0; \quad V(1; \tau) = 0. \quad (26)$$

2. Параметр  $b$  определяет уровень нелинейности исследуемой краевой задачи. Вместе с увеличением параметра  $b$  в тех пределах, которые определяются физическими характеристиками колебательной системы, ее собственные частоты незначительно уменьшаются (в пределах 0,3% от максимальной величины  $\omega$ ).

3. Изменением частоты основного тона собственных колебаний электрического провода из-за перемещения его правой опоры в вертикальной плоскости можно пренебречь.

4. При подвижной в вертикальной плоскости правой опоре (рисунок) краевые условия задачи можно принять в виде (26).

5. Для практического решения вопроса об оптимальном виброподавлении вынужденных продольных колебаний гирлянд изоляторов электрических проводов мощных ЛЭП могут быть использованы катковые виброгасители.

Р Е З Ю М Е . Розглянуто вільні коливання струни, лівий кінець якої є нерухомим, а правий має можливість переміщуватись у вертикальній площині за деяким законом. Обґрунтовано граничні умови, які мають місце при такій постановці задачі. Показано, що разом із зростанням величини параметра нелінійності  $b$  системи власні частоти  $\omega$  несуттєво зменшуються.

1. Крижов Г.П., Удод Т.С., Гримуд Г.І. Ожеледно-вітрові навантаження, галопування проводів повітряних ліній електропередавання та боротьба з ними. – К.: Мінпаливенерго України / Довідково-методичний посібник – 2010. – 454 с.
2. Легеца В.П. Віброзахист динамічних систем із котковими гасниками. – К.: Четверта хвиля, 2010. – 280 с.
3. Легеца В.П., Легеца Д.В., Бовкун О.В. Котковий гасник для придушення галопування проводів потужних ліній електропередач / Патент на корисну модель №80556 від 10.06.2013 р. // Бюл. – № 11 за 2013 р.
4. Савин Г.Н., Горошко О.А. Динамика нити переменной длины: применительно к шахтным подъемам. – К.: Изд-во АН УССР, 1962. – 331 с.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
6. Achkire Y., Bossens F., Preumont A. Active damping and flutter control of cable-stayed bridges // J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. – 1998. – 74 – 76. – P. 913 – 921.
7. Babaarslan Osman, Iype Cherian. Tension variations during cone winding on an open-end spinning system // Text. Res. J. – 1998. – 68, N 9. – C. 649 – 654.
8. Barsegyan V.P., Movsisyan L.A. Optimal control of the vibration of the elastic system described by the wave equation // Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N 2. – P. 234 – 239.
9. Behbahani-Nejad M., Perkins N. C. Freely propagating waves in elastic cables // J. Sound and Vibr. – 1996. – N 2. – C. 189 – 202.
10. Berger R. Instationare Bewegung eines Fadens bei geometrischer Nichtlinearität // Z. Angew. Math. und Mech. – 1995. – 75. Suppl. Ni. – C. 47 – 48.
11. Legeza V.P. Dynamics of Vibration Isolation System with a Quazi-Isochronous Roller Shock Absorber // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 3. – P. 329 – 337.
12. Makmudov A., Muravey L. The problem of string vibrations damping // Proceedings of the 1<sup>st</sup> Int. Conf. on Nonlinear Analysis and Nonlinear Modeling. – 2001. – P. 174 – 182.
13. Plakhtienko N.P. Modelling a Vibrating Mechanical System with an Acceleration-Feedback Controlled Frictional Electromagnetic Damper // Int. Appl. Mech. – 2011. – 47, N 1. – P. 97 – 106.
14. Preumont A., Achkire Y. Active damping of structures with guy cables // AIAA J. of Guidance, Control and Dynamics. – 1997. – 20, N 2. – P. 320 – 326.
15. Preumont A., Achkire Y., Bossens F. Active tendon control of large trusses // AIAA J. – 2000. – 38, N 3. – P. 493 – 498.
16. Wang Y.F., Luo C.J. Dynamics of traveling inextensible cables. // Commun. Nonlinear Sci. and Numer. Simul. – 2004. – N 5. – C. 531 – 542.

Поступила 19.02.2012

Утверждена в печать 26.06.2013