

УДК 534.26

МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ДІЛЯНКИ ПОВЕРХНІ ТІЛА ЛЮДИНИ З ВІБРАТОРОМ

В. Н. ОЛІЙНИК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 16.01.2003 ◊ Переглянуто 18.07.2003

Побудовані фізична й математична моделі контактної взаємодії поверхні тіла людини з вібратором механічного імпедансметра. На основі припущення, що основну роль при такій взаємодії грає стовп м'яких біотканин між вібратором і кістками скелету, розглянуто задачу про гармонічні коливання пружного циліндра з кінематично навантаженим торцем за умови відсутності дотичних напружень на поверхні контакту. Проведене тестування моделі на основі порівняння з експериментами по вібробудженню шару в'язко-пружного гелю і шкіри передпліччя людини *in situ*. Обраховані частотні залежності механічного імпедансу циліндра продемонстрували в цілому задовільне узгодження з дослідними даними. Таким чином, підтверджено, що при моделюванні низькоамплітудних коливань м'яких біотканин можна застосовувати модель лінійно пружного середовища з затуханням поперечних хвиль.

Построены физическая и математическая модели контактного взаимодействия поверхности тела человека с вибратором механического импедансметра. На основании предположения о том, что основную роль при таком взаимодействии играет столб мягких биотканей между вибратором и костями скелета, рассмотрена задача о гармонических колебаниях упругого цилиндра с кинематически нагруженным торцом при условии отсутствия касательных напряжений на поверхности контакта. Проведено тестирование модели путем сравнения с экспериментами по вибровозбуждению слоя вязко-упругого геля и кожи предплечья человека *in situ*. Расчетные частотные зависимости механического импеданса цилиндра продемонстрировали в целом удовлетворительное согласование с опытными данными. Таким образом, подтверждено, что при моделировании низкоамплитудных колебаний мягких биотканей можно применять модель линейно упругой среды с затуханием поперечных волн.

Physical and mathematical models of contact interaction of a human tissue with mechanical impedancemeter are developed. On the basis of the assumption that the main role at such interaction is played by a column of soft biotissues between the vibrator and bones of a skeleton, the problem on harmonic vibrations of the elastic cylinder with kinematically loaded end face under the condition of absence of tangential stresses at the contact surface is considered. Testing of the model was carried out through comparison with the experiments on vibroexcitation of a layer of a viscoelastic gel and a skin of human forearm *in situ*. Discovered frequency dependencies of mechanical impedance of the cylinder have shown as a whole the satisfactory coordination with the experimental data. So, it is confirmed, that when modeling the low-amplitude vibrations of the soft biotissues it is possible to apply the model of linearly elastic medium with attenuation of transversal waves.

ВСТУП

Вивчення особливостей динамічної взаємодії поверхні тіла людини з контактними сенсорами розпочалося наприкінці 1940-х рр. Судячи з усього, ці дослідження були викликані, насамперед, необхідністю оперативного контролювати самопочуття пілотів реактивних літаків (див. статтю [1], а також повідомлення про експериментальні дослідження Franke і von Gierke [2, 3]). У наш час посилення інтересу до цієї тематики обумовлюється активним розвитком сучасних медичних технологій, пов'язаних з реєстрацією та обробкою акустичних сигналів, породжених життєдіяльністю людського організму [1, 4–6]. Адекватне врахування динамічної реакції поверхні тіла на присутність сенсора дозволяє передбачити характер і ступінь спотворення прийнятого сигналу за рахунок зміни віброакустичного поля в околі контакту [5, 7].

Слід зауважити, що, незважаючи на значний обсяг накопичених експериментальних даних, існують суттєві труднощі з їх теоретичною інтерпре-

тацією. Наприклад, у статті [6] зверталась увага на невідповідність класичної моделі поведінки м'яких біотканин [1] наявним експериментальним даним. Окрім того, потребує пояснення істотна розбіжність між величиною механічного імпедансу, визначеною вібраційним методом [4, 8], і даними про рівень послаблення фонокардіографічного сигналу при реєстрації кінематичними сенсорами різної ваги [7].

На нашу думку, одною з причин вказаних труднощів може бути принципова різниця в характері граничних умов при контакті тіла людини з вібратором і кінематичним сенсором. Справа у тому, що під час вимірювань пелот (робочий стержень) вібратора, яким навантажується поверхня тіла для визначення її динамічної реакції, не зв'язаний жорстко зі шкірою [8]. Очевидно, що при цьому повинне існувати просковзування (на контактній ділянці вважаються заданими нормальні зміщення, нав'язані штампом, а дотичні напруження визначаються механічним тертям). У першому наближенні таку ситуацію зазвичай мо-

делюють умовами гладкого контакту. Кінематичні ж сенсори, які використовуються у ряді сучасних респіросонографічних комплексів, під час роботи перебувають в умовах жорсткого зчеплення зі шкірою – вони приклеюються до неї [9] (тут задаються нормальні й радіальні зміщення, причому останні дорівнюють нулю).

Незважаючи на існування ряду теоретичних і експериментальних робіт, спрямованих на обґрунтування тих чи інших моделей взаємодії поверхні тіла людини з поршневими вібраторами [1, 6, 10, 11], ця проблема до цього часу не може вважатися розв'язаною остаточно. Здебільшого дослідники такої взаємодії робили спроби використати для інтерпретації одержаних результатів спрощені задачі математичної фізики, які дозволяють отримати аналітичний розв'язок (див. [1, 10, 11]). При цьому характер зчеплення з об'єктом вимірювань ігнорувався (фактично, покладались рівними нулю дотичні напруження). Очевидно, що такий підхід до певної міри виправданий, якщо описувати ситуацію з вібробудженням, але абсолютно неприйнятний для аналізу поведінки кінематичного сенсора на поверхні тіла людини.

Як зазначалось в роботі [12], з точки зору динамічної теорії пружності вібратор чи сенсор природно розглядати як твердий штамп, який контактує з пружною деформівною поверхнею. Це дозволяє віднести обидва випадки взаємодії до єдиного класу контактних задач механіки деформівного твердого тіла, пов'язаних між собою спільністю математичних формулювань і методів розв'язання. Очевидно, що з математичної точки зору тут потрібно розв'язувати мішані граничні задачі, в яких на одній частині поверхні задаються механічні напруження, а на іншій – зміщення (або зміщення в комбінації з напруженнями). Зауважимо, що розв'язання таких задач є досить складною процедурою. При цьому шукані розв'язки виражаються через інтегральні співвідношення або нескінченні алгебраїчні системи, тобто не можуть бути записані в зручній для фізичної інтерпретації аналітичній формі.

З огляду на сказане доцільно розглянути фізичну модель досліджуваної системи при певних спрощуючих припущеннях, але зі збереженням характеру граничних умов на поверхні контакту. При цьому прийняті спрощення повинні, по можливості, дозволити записати розв'язок задачі в замкнутому вигляді (або у вигляді функціонального ряду з відомими коефіцієнтами). Такий підхід повинен допомогти більш наочно продемонструвати риси, які є суттєвими для адекватного опису контактної взаємодії поверхневих м'яких біотка-

нин з сенсором або вібратором. Цю статтю присвячено розробці спрощеної моделі, яка відповідає вібробудженню локалізованої ділянки поверхні тіла людини.

1. ФІЗИЧНІ Й ГЕОМЕТРИЧНІ ПАРАМЕТРИ СИСТЕМИ

Перш ніж викласти математичну постановку задачі, слід з'ясувати питання про фізико-механічні характеристики м'яких біотканин і геометричні особливості досліджуваної системи.

Перш за все слід пам'ятати, що питання про реологічну модель і фізичні параметри м'яких біотканин тіла людини залишається до певної міри дискусійним. Зокрема, існує думка про те, що залежність між механічними напруженнями й деформаціями в цих тканинах є нелінійною. Окрім того, деякі автори наполягають на тому, що фізичні параметри поверхні тіла суттєво залежать від маси сенсора, який контактує з нею [7]. Проте аналіз наявних експериментальних даних дозволяє стверджувати, що для відносно легких сенсорів така параметрична залежність не проявляється і поверхневі біотканини можна вважати лінійним ізотропним пружним матеріалом [5]. Це припущення підтверджується, зокрема, відомостями про квазістатичні пружні характеристики різних типів м'яких біотканин, наведеними в огляді [13].

Загальновідомо, що густини епітелію, м'язових та жирових тканин ненабагато перевищують густину води [1, 14]. Тому при постановці модельної задачі приймемо густину пружного середовища $\rho = 1100 \text{ кг/м}^3$. Ще один параметр, який порівняно легко визначити експериментальним шляхом – модуль Юнга E . За різними оцінками для поверхневих біотканин діапазон його характерних значень складає $(2 \div 7.6) \cdot 10^3 \text{ Па}$ [14]. У цьому дослідженні ми приймемо $E = 7.5 \cdot 10^3 \text{ Па}$. Слід зауважити, що реальні пружні характеристики різних типів м'яких біотканин (жир, м'язи, тощо) досить помітно відрізняються між собою. Наприклад, в залежності від стану й тону м'язів їхній модуль Юнга може змінюватись практично в сто разів [13]. Проте, для розслаблених м'язів, жирової тканини й епітелію одержана нами оцінка величини E може вважатися справедливою.

Щодо величини коефіцієнта Пуассона ν , яка може бути визначена лише опосередковано, існують певні розбіжності. Однак оскільки поверхневі м'які біотканини малостисливі, немає сумніву, що $\nu > 0.45 \div 0.49$ [13, 15]. Оскільки від точності визначення пружних характеристик досліджуваної системи суттєво залежить адекватність опису її пове-

дінки, обговоримо це питання більш детально.

Традиційно більшість дослідників вважає швидкість поздовжніх хвиль у поверхневих біотканинах c_1 близькою до швидкості звуку у воді [6, 10]. Виходячи з відомих значень коефіцієнтів об'ємної пружності для біологічних тканин [1, 18], знаходимо, що в нашому випадку $c_1 \approx 1500$ м/с.

Численні експерименти свідчать, що швидкість поширення поперечних хвиль у поверхневих біотканинах c_2 є дуже низькою (десятки або, навіть, одиниці метрів за секунду) [1, 6, 13–15]. Оскільки поперечні хвилі в поверхневих м'яких біотканинах значно повільніші від поздовжніх, у роботі [12] була зроблена спроба змоделювати шаром акустичного середовища, знехтувавши можливістю поширення в ньому поперечних хвиль. Однак це спрощення призвело до того, що одержані в такому наближенні результати принципово суперечать існуючим уявленням про імпедансні властивості поверхні тіла людини. Отже, урахування поперечних хвиль є суттєвим моментом для адекватного опису контактної взаємодії поверхні тіла людини з сенсором або вібратором. Відзначимо, що при динамічному навантаженні поверхні пружного об'єкта основна доля енергії пружних хвиль не проникає в його глибину, а витрачається на формування поверхневої хвилі [16]. З огляду на це, в роботі [17] було зроблено спробу зімітувати імпедансні властивості шару поверхневих біотканин, не вдаючись до моделі в'язко-пружного тіла. При цьому можливість поширення поперечних хвиль забезпечувалась наявністю мембрани, яка вкриває шар акустичного середовища. Незважаючи на те, що такий підхід забезпечив якісне узгодження одержаних результатів з експериментальними даними, запропонована модель значною мірою носить штучний характер. Так, значні труднощі викликає питання про те, які ж саме фізичні параметри слід присвоїти поверхневій мембрані.

Для визначення самоузгодженої системи параметрів модельного середовища скористаємось відомими співвідношеннями, які описують залежності між густиною, пружними модулями й швидкостями поширення поздовжніх та поперечних хвиль c_1 і c_2 в лінійному пружному матеріалі [16]:

$$c_1^2 = \frac{1 - \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{E}{\rho} = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} \frac{G}{\rho}, \quad (1)$$

$$c_2^2 = \frac{G}{\rho}.$$

Тут $G = 0.5E/(1 + \nu)$ – модуль зсуву. Очевидно, що при зменшенні стисливості пружного матеріалу ($\nu \rightarrow 0.5$) зростає різниця між швидкостями

ми поздовжньої й поперечної хвиль у середовищі: $c_2/c_1 \rightarrow 0$. З формули (1) випливає, що при цьому справедливою стає оцінка $E \approx 3G = 3\rho c_2^2$. Вже при $c_2/c_1 = 0.3$ ($\nu \approx 0.45$) похибка складає близько 3.3 %, а при $c_2/c_1 = 0.2$ ($\nu \approx 0.48$) – менше 0.007 %. Тому, виходячи з прийнятих вище значень для E і ρ , одержуємо модуль пружності при зсуві $G \approx 2.5 \cdot 10^3$ Па і швидкість поперечної хвилі $c_2 \approx 1.51$ м/с. Це в цілому узгоджується з експериментальними й теоретичними даними [1, 11, 15] (судячи з усього, в [14, табл. 1] помилково пропущений порядок величини G).

Порівняємо одержане значення швидкості поперечної хвилі з результатами дослідів [6], проведених на механічній моделі м'якої біотканини (для цього була підібрана спеціальна гелева композиція). Як видно з графіків [6, рис. 5, 6], довжина поверхневої хвилі в такій речовині на частоті $f = 60$ Гц становила $\lambda_R \approx 3$ см. Звідси знаходимо швидкість поверхневої хвилі: $c_R = \lambda_R f \approx 1.8$ м/с. Оскільки при $\nu \rightarrow 0.5$ справедливо $c_R \approx 0.955c_2$, то, остаточно, у згаданому дослідженні $c_2 \approx 1.885$ м/с, що дуже близько до нашої теоретичної оцінки.

Цікаво відзначити, що при одержаних величинах c_1 і c_2 розрахункова величина коефіцієнта Пуассона виявляється дуже близькою до 0.5: $\nu \approx 0.4999995$. Цей висновок ще раз підтверджує, що пружні властивості біотканин мають яскраво виражену специфіку, а їхні параметри не завжди можна достатньо надійно визначити експериментальним шляхом.

Як показує досвід, при моделюванні взаємодії сенсора чи вібратора з поверхневими біотканинами найбільш природно розглядати задачі про навантаження штампом деформівного півпростору [1], або шару м'якої біотканини, який лежить на кістковій основі зі значно більшою жорсткістю [11]. Виходячи з порівняння фізичних параметрів м'яких і кісткових тканин [6, 14, 19], можна зробити висновок, що при аналізі особливостей контактної взаємодії на поверхні грудної клітки людини більш природно розглядати деформівний шар, який лежить на абсолютно твердій основі [12]. Таку модельну систему можна розглядати як своєрідний хвилевід, причому за рахунок наявності вільної поверхні для нього повинні існувати частоти відсікання, нижче найменшої з яких випромінювання відсутнє [20] й практично вся енергія вібрацій локалізована в стовпі біотканини під штампом. Це твердження можна проілюструвати, наприклад, результатами, наведеними в [12]. Як і слід було очікувати, на частотах, для яких висота шару не перевищує чверті поздовжньої довжини хвилі, у бездисипативному середовищі актив-

на частина імпедансу залишається нульовою. Для поздовжніх хвиль у шарах м'яких біотканин з товщинами, які відповідають особливостям анатомічної будови тіла людини, ця умова виконується практично для всього частотного діапазону чутних звуків. Водночас, для значно повільніших поперечних хвиль діапазон, в якому немає акустичного випромінювання, обмежується вже десятками герц.

Виходячи з наведених міркувань, можна припустити, що при контактній взаємодії сенсора (вібратора) з поверхнею тіла людини існує певна частотна смуга, в якій при формуванні імпедансних властивостей контактної ділянки поверхні фактично бере участь лише стовп біотканини, що знаходиться безпосередньо під зоною контакту. Це дозволяє значно спростити фізико-математичну модель досліджуваної системи і розглянути задачу про вимушені коливання скінченного пружного циліндра з вільною бічною поверхнею і торцями, до яких прикладене гармонічне кінематичне навантаження – осьові зміщення торців вважаються заданими. Вибір циліндричної геометрії для модельної системи зумовлений тим, що контактні поверхні сенсорів і вібраторів, як правило, мають круглу форму. Виходячи з особливостей анатомії людини і даних про існуючі віброакустичні системи для вимірювань біофізичних параметрів, приходимо до висновку, що найбільший інтерес для нас становитимуть циліндри, відношення радіуса до висоти для яких лежать у межах від 1/4 до 4.

Найменш дослідженим залишається питання про фізичну природу й величину затухання у м'яких біотканинах [6, 14]. Як правило, при теоретичних дослідженнях вважають, що на частотах, характерних для звуків серцебиття й дихання (нижче 1.5 ÷ 2 кГц), поздовжні хвилі в такому середовищі не затухають. Це припущення має зрозуміле фізичне обґрунтування, адже при швидкості поширення поздовжніх хвиль порядку 1500 м/с у всьому зазначеному частотному діапазоні найбільший характерний розмір людського тіла не перевищує одної – двох довжин хвиль. Загальновідомо, що при таких малих хвильових розмірах дисипативні ефекти в середовищі практично не проявляються [20]. На відміну від цього, для повільних поперечних хвиль у м'яких біотканинах характерні хвильові розміри, як мінімум, на два порядки перевищують хвильові розміри для поздовжніх хвиль. Тому затуханням поперечних хвиль для практично важливих випадків нехтувати не можна [1, 10, 11]. Що ж до оцінок величини затухання у м'яких біотканинах, то різні автори наводять дані, які суттєво відрізняються. Так, в роботі [13] за-

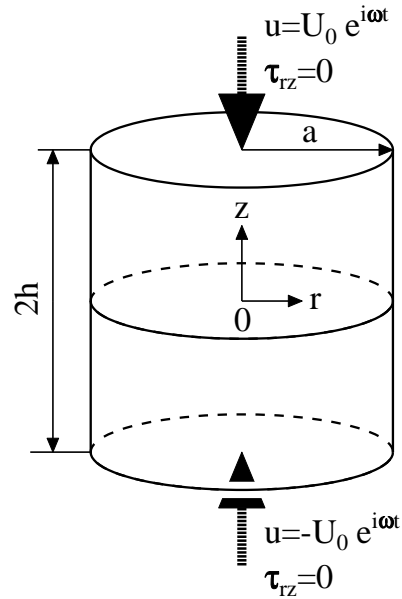


Рис. 1. Пружний циліндр з кінематично навантаженими торцями

пропоновано для урахування втрат використовувати комплексний модуль зсуву $G^* = G + iG'$ (очевидно, вважаючи, що G' не залежить від частоти). Інші ж автори схиляються до моделювання втрат у такому середовищі через уведення в'язкості при зсуві G'' : $G^* = G + i\omega G''$. Очевидно, що при цьому замість швидкості поширення поперечних хвиль c_2 слід розглядати комплексну величину $c_2^* = G^*/\rho$. Зазначимо, що кількісні оцінки цього параметра різними дослідниками відрізняються практично на два порядки. Наприклад, в статті [1] вказано величину $G'' = 15$ Па·с, у той час, як автори роботи [10] більш імовірним вважають, що $G'' \approx 0.2$ Па·с. Виходячи з цього, при тестуванні досліджуваної теоретичної моделі доцільно провести обрахунки при різних значеннях G' і G'' .

2. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ І РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

Нехай до торців кругового циліндра висотою $2h$ й радіусом a (рис. 1) вздовж його осі прикладено гармонічне за часом кінематичне навантаження $U_0 e^{i\omega t}$. Бічна поверхня циліндра вільна від навантажень.

Матеріал циліндра вважаємо ідеально пружним – його динамічні деформації описуються рівняннями Ламе, яке для гармонічного випадку має вигляд

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{u}. \quad (2)$$

Тут $\mathbf{u} = \{u_r, u_\theta, u_z\}$ – вектор амплітуд зміщень [16] (експоненційний часовий множник опущено).

Оскільки задача в такій постановці має осьову симетрію, то в усіх співвідношеннях $\partial/\partial\theta \equiv 0$, $u_\theta \equiv 0$. З урахуванням цього граничні умови на бічній поверхні запишемо як відсутність радіальних і дотичних механічних напружень при $r = a$, $|z| \leq h$:

$$\frac{1 - 2\nu}{2G} \sigma_r = (1 - \nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{1}{G} \tau_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0.$$

Для завершення математичної постановки задачі слід остаточно сформулювати механічні умови на торцях циліндра. Будемо вважати, що нормальні зміщення торця циліндра нав'язуються через кінематичне навантаження:

$$u_z = \pm U_0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (4)$$

Оскільки у цій статті ми обмежуємо свій розгляд задачею, яка моделює віброзбудження поверхні тіла, то друга умова на торці має описувати гладкий контакт (ковзання):

$$\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (5)$$

Слід пам'ятати, що при динамічному навантаженні пружної поверхні гладким штампом під час зворотного ходу штампа в деяких випадках можливий повний або частковий відрив його основи від zdeформованого матеріалу. Щоб уникнути цього явища при натурних експериментах на м'яких біотканинах, застосовують попереднє вдавлювання пелота вібратора на величину, яка не впливає суттєво на механічні й геометричні параметри досліджуваного об'єкта. Як правило, величина попереднього вдавлювання становить близько 1 мм [8, 13].

Як уже зазначалося, нас цікавитиме механічний імпеданс торця циліндра, який визначається формулою

$$\mathcal{Z} = \frac{\mathcal{F}_z}{i\omega U_0} = \frac{2\pi}{i\omega U_0} \int_0^a \sigma_z r dr \quad \text{при} \quad z = \pm h. \quad (6)$$

Тут \mathcal{F}_z – повна реакція торця циліндра вздовж осі z ; σ_z – осьові механічні напруження в циліндрі:

$$\sigma_z = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left[(1 - \nu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \left(\frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) \right].$$

Внаслідок симетрії розглянутої задачі відносно площини $z = 0$ в подальшому будемо обчислювати механічні характеристики тільки на торці $z = h$.

Загальний розв'язок задачі для зміщень має вигляд

$$u_r = A_0 J_1(k_1 r) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \eta_n z \times$$

$$\times \left[A_n I_1(q_{1n} r) + A_n^* I_1(q_{2n} r) \right], \quad (7)$$

$$u_z = U_0 \frac{\sin k_1 z}{\sin k_1 h} - \sum_{n=1}^{\infty} \sin \eta_n z \times$$

$$\times \left[A_n \frac{\eta_n}{q_{1n}} I_0(q_{1n} r) + A_n^* \frac{q_{2n}}{\eta_n} I_0(q_{2n} r) \right].$$

У співвідношеннях (7) введені такі позначення:

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}; \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2^*};$$

$$\eta_n = \frac{\pi n}{h}; \quad q_{ln} = \sqrt{\eta_n^2 - k_l^2}; \quad l = 1, 2;$$

J_s та I_s – відповідно звичайні й модифіковані функції Беселя першого роду (індекс s означає порядок функції Беселя); A_0 , A_n і A_n^* – невідомі коефіцієнти рядів Фур'є.

Оскільки ми вивчаємо імпедансні властивості циліндра, важливо записати формулу для визначення повної реакції торця через ряди (7). Після інтегрування по $0 \leq r \leq a$ з урахуванням відомих властивостей циліндричних функцій одержуємо:

$$\frac{1}{2GU_0} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{F}_z = \frac{i\omega}{2G} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{Z} =$$

$$= \chi k_1 h \operatorname{ctg} k_1 h - \frac{2h}{a} (\chi - 1)^2 A_0 J_1(k_1 a) -$$

$$- \frac{2h}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \frac{\eta_n^2}{q_{1n}^2} \left[1 + (\chi - 1) \frac{k_1^2}{\eta_n^2} \right] \times \right.$$

$$\left. \times A_n I_0(q_{1n} a) + A_n^* I_0(q_{2n} a) \right\}, \quad (8)$$

де $\chi = k_2^2 / (2k_1^2)$. При виводі формули (8) були враховані тотожності

$$\frac{1 - \nu}{1 - 2\nu} = \chi, \quad \frac{\nu}{1 - 2\nu} = \chi - 1.$$

Переходячи до аналітичного розв'язання сформульованої задачі, зазначимо, що дві з чотирьох граничних умов визначають прості залежності між відповідними невідомими коефіцієнтами. Так, з умов відсутності дотичних напружень τ_{rz} на бічній поверхні циліндра $r = a$, $|z| \leq h$ (друге співвідношення (3)) впливає рівність

$$A_n = -\alpha_n A_n^*, \quad \alpha_n = \left(1 - \frac{k_2^2}{2\eta_n^2} \right) \frac{I_1(q_{2n} a)}{I_1(q_{1n} a)}. \quad (9)$$

Відсутність нормальних напружень σ_r на бічній поверхні циліндра породжує функціональне рівняння

$$(\chi - 1)U_0k_1 \frac{\cos k_1 z}{\sin k_1 h} + A_0k_1\Delta_0^A - \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \cos \eta_n z \Delta_n^A = 0 \quad (10)$$

($r=a$, $|z| \leq h$), яке після алгебраїзації з урахуванням залежності (9) дає

$$A_0 = -(\chi - 1) \frac{U_0}{\Delta_0^A} \frac{a}{h}, \quad (11)$$

$$A_n^* = (-1)^{n+1} (\chi - 1) \frac{U_0}{\Delta_n^A} \frac{a}{h} \frac{2k_1^2}{q_{1n}^2}.$$

Тут

$$\Delta_0^A = \chi k_1 a J_0(k_1 a) - J_1(k_1 a);$$

$$\Delta_n^A = \alpha_n \left[\left(1 - (\chi - 1) \frac{k_1^2}{q_{1n}^2} \right) q_{1n} a I_0(q_{1n} a) - I_1(q_{1n} a) \right] - \left[q_{2n} a I_0(q_{2n} a) - I_1(q_{2n} a) \right];$$

$$n = 1, 2, \dots$$

З урахуванням рівності (9) після очевидних перетворень повну реакцію торця (8) запишемо у вигляді

$$\frac{1}{2GU_0} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{F}_z =$$

$$= \chi k_1 h \operatorname{ctg} k_1 h + \frac{2h}{a} (\chi - 1) A_0 J_1(k_1 a) -$$

$$- \frac{h}{a} (\chi - 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k_1^2 k_2^2}{q_{1n}^2 \eta_n^2} A_n^* I_1(q_{2n} a), \quad (12)$$

а підставивши вирази для A_0 , A_n^* з формул (11), остаточно одержимо

$$\frac{1}{2GU_0} \frac{h}{\pi a^2} \mathcal{F}_z =$$

$$= \chi k_1 h \operatorname{ctg} k_1 h - \frac{2(\chi - 1)^2 J_1(k_1 a)}{\chi k_1 a J_0(k_1 a) - J_1(k_1 a)} +$$

$$+ 2(\chi - 1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_1^4 k_2^2}{q_{1n}^4 \eta_n^2} \frac{I_1(q_{2n} a)}{\Delta_n^A}. \quad (13)$$

Цікаво відзначити, що в цьому співвідношенні перший доданок відповідає складовій реакції торця, яку привносить віброзбудження, другий – внескові радіальних мод для поздовжньої хвилі, а третій – для поперечних хвиль. Таким чином, внески різних типів хвиль у шуканий розв'язок повністю розділилися, що значно полегшує аналіз динамічних властивостей системи. Принагідно зауважимо, що \mathcal{F}_z і \mathcal{Z} є інтегральними фізичними характеристиками системи, для обчислення яких можна не досліджувати характер особливості на ребрі циліндра [16].

3. АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Дослідимо низькочастотну поведінку імпедансу торця циліндра при гладкому контакті зі штампом. Випадок $\omega \rightarrow 0$ з практичної точки зору відповідає діапазону частот, в якому довжини поздовжньої й поперечної хвиль значно перевищують характерні розміри циліндра.

Очевидно, що при $k_1 \ll 1$ нескінченна сума в формулі (12) має значно вищий порядок малості, ніж два перші члени. Тоді, замінивши циліндричні функції на відповідні асимптотичні вирази в околі нуля [21], після очевидних перетворень отримаємо з точністю до $O(\omega^2)$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{Z} = \frac{\pi a^2}{h} \left[\frac{1}{i\omega} E + i\omega \rho \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{\nu^2}{2} a^2 \right) \right]. \quad (14)$$

Цей результат дає можливість оцінити ступінь залучення пружного матеріалу циліндра до контактної взаємодії торця зі штампом. Виявляється, що за умови гладкого контакту пружна характеристика формується за рахунок усього стовпа матеріалу під штампом, а інерційні властивості визначаються лише відносно невеликою кінцевою зоною, яка здійснює інтенсивні коливання.

З формули (14) можна визначити першу резонансну частоту, яка відповідає вимушеним осесиметричним коливанням системи з навантаженням торців:

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{\rho} \left(\frac{1}{3} h^2 + \frac{\nu^2}{2} a^2 \right)} =$$

$$= \frac{c_2 \sqrt{1 + \nu}}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3} h^2 + \nu^2 a^2}. \quad (15)$$

Співставимо одержану теоретичну оцінку f_r з результатами експериментів по гармонічному збудженню поверхні розслабленого передпліччя дорослої людини [8] вібраторами трьох різних діаметрів – $2a = 8.075$, 11.8 і 16.03 мм. При цьому

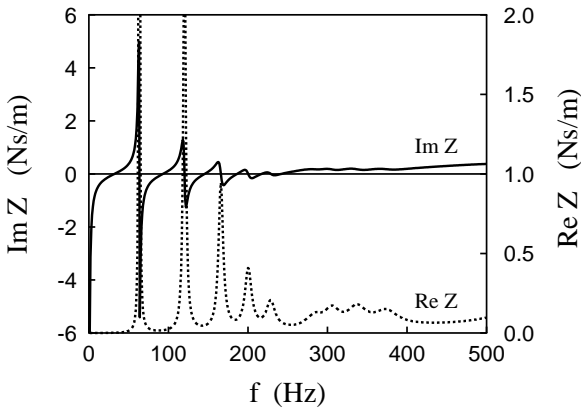


Рис. 2. Частотна залежність імпедансу пружного циліндра з кінематично навантаженими торцями при гладкому контакті зі штампом; $2a=10$ мм, $h=3$ см, $\rho=1008$ кг/м³, $c_1=1500$ м/с, $c_2=2.23$ м/с ($G=5$ кПа), $G''=0.2$ Па·с

резонансні частоти, визначені з дослідних кривих для уявної частини імпедансу, становлять відповідно 112, 96 і 85 Гц. Тоді при $\nu \approx 0.5$ товщини шару м'яких тканин над кістками передпліччя, обрховані за співвідношенням (15), складають відповідно 5.94, 6.58 і 6.91 мм. Ці значення задовільно узгоджуються з уявленнями про анатомічну будову руки людини. Логічним виглядає й спадання резонансної частоти при збільшенні діаметра робочої частини вібратора: збільшення зони контакту супроводжується зростанням приєднаної маси поверхні тіла, в той час як жорсткість системи залишається сталою.

Ще одним непрямим підтвердженням справедливості розробленої моделі можна вважати характер частотних залежностей модуля імпедансу поверхні грудної клітки, наведених у роботі [4]. Тут шар поверхневих тканин має бути ще тоншим, тому резонансні частоти (вони відповідають низькочастотним мінімумам $|Z|$) виявились дещо вищими – до 200 Гц.

4. ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ

На рис. 2 показані частотні залежності дійсної й уявної частин механічного імпедансу торця циліндра для в'язко-пружного матеріалу з параметрами, які відповідають фізичним константам гелеподібної речовини, використаної в дослідженні [10]. Характер наведених частотних залежностей $\text{Im } Z$ і $\text{Re } Z$, їхні амплітуди й значення резонансних частот добре узгоджуються з результатами експериментів по вимірюванню імпедансу поверхні три-

сантиметрового шару гелю. Існуючі розбіжності (дещо гостріші резонансні піки й більш повільне наростання величини $\text{Re } Z$ при $f > 200$ Гц) можна пояснити за рахунок випромінювання механічної енергії в область поза контактом з вібратором з подальшою її дисипацією.

Таким чином, можна зробити висновок про адекватність розробленої фізико-математичної моделі контактної взаємодії і ефективність створеного розрахункового алгоритму. Тестування алгоритму при різній кількості поперечних мод, утриманих у відрізьку відповідного ряду (див. розв'язок (13)), показало, що для розглянутого частотного діапазону достатньо залишити чотири–п'ять членів. При введенні в'язкості порядку $G''=0.2$ Па·с виявилось достатнім обмежитись двома–трьома членами.

На рис. 3 і 4 дається порівняння кривих для $\text{Im } Z$ і $\text{Re } Z$, одержаних в експерименті по віброзбудженню передпліччя людини (дані запозичені з [8, рис. 4]), з розрахунками, проведеними для циліндра з відповідними фізичними й геометричними параметрами.

Рис. 3 відображає вплив різних моделей затухання на частотну поведінку імпедансу (узагальнена залежність для комплексного модуля зсуву приймалась у вигляді $G^* = G + i(G' + \omega G'')$). З рис. 3, а видно, що найбільше затухання має місце в околі резонансів циліндра, пов'язаних з його поперечними модами. Це проявляється у згладженні резонансних піків. При цьому слід відзначити, що всі розглянуті варіанти виявились досить близькими між собою. Найбільш згладженою виявилась частотна залежність для $\text{Im } Z$ при $G' \neq 0$, $G'' \neq 0$. Зауважимо, що при $f > f_T$ частотні залежності імпедансу, обчислені з урахуванням поперечних мод, лежать помітно нижче як експериментальної кривої, так і асимптотичної залежності Z_{1f} . Це природно, оскільки наявність скінченної пружності при зсуві робить систему більш жорсткою. Зближення теоретичної й експериментальної залежностей можна очікувати при розгляді фізичного об'єкта, частина поверхні якого залишається поза робочим торцем пелота вібратора (плоско-паралельний шар, циліндр з радіусом, який значно перевищує a , тощо). Очевидно, що наявність вільної поверхні повинна збільшити приєднану масу системи, яка компенсує пружність, що вноситься поперечними модами. Що ж до низьких частот ($f \leq f_T$), тут добре працює низькочастотна асимптотика (14).

Розглянувши поведінку $\text{Re } Z$ (рис. 3, б), слід відзначити, що експеримент дає величину затухання, яка в усьому частотному діапазоні значно перевищує розрахункові значення. Для об'єктів,

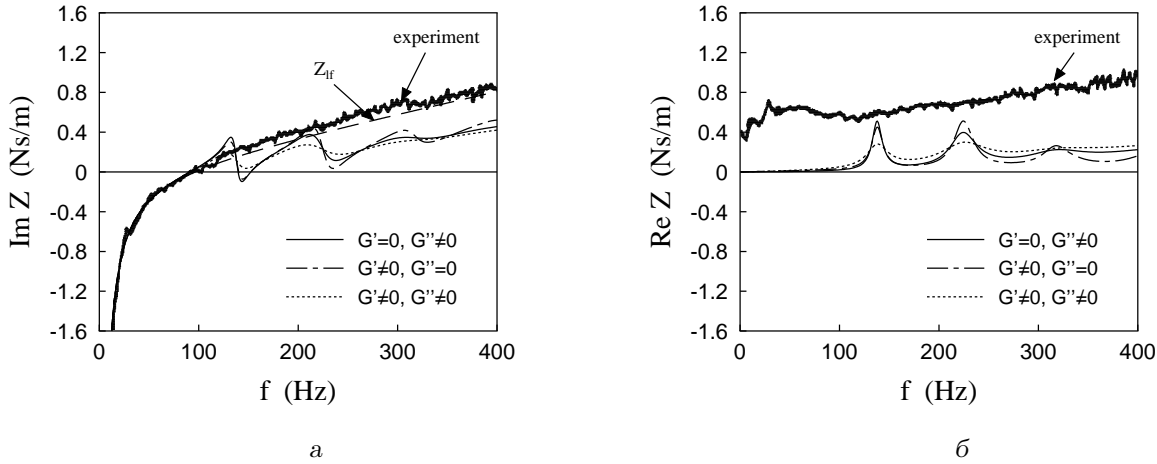


Рис. 3. Порівняння експериментальних кривих для імпедансу передпліччя людини (за даними [8]) з розрахунковими залежностями при різних характерах затухання; $2a=11.8$ мм, $h=6.5$ мм, $\rho=1100$ кг/м³, $c_1=1500$ м/с, $c_2=1.51$ м/с ($G=2.5$ кПа), $G'=250$ Па, $G''=0.25$ Па·с

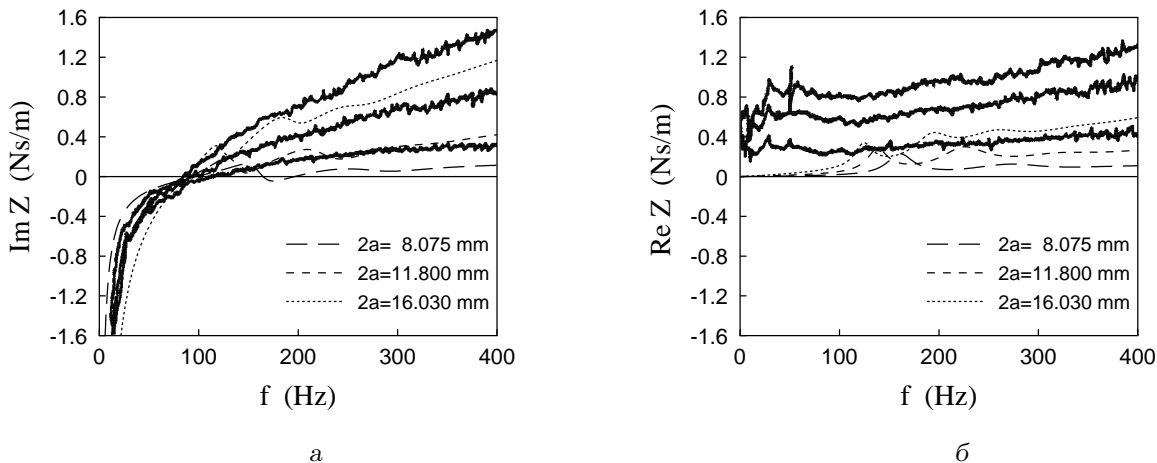


Рис. 4. Порівняння експериментальних кривих для імпедансу передпліччя людини (за даними [8]) з розрахунковими залежностями при різних діаметрах вібратора; $2a=8.075$, 11.8 і 16.03 мм, $h=6.5$ мм, $\rho=1100$ кг/м³, $c_1=1500$ м/с, $c_2=1.51$ м/с ($G=2.5$ кПа), $G'=250$ Па, $G''=0.25$ Па·с

у яких частина поверхні залишається поза контактом з вібратором, можна сподіватись на зростання $\text{Re } Z$ (див. міркування, наведені при обговоренні рис. 2). Зауважимо, що високий рівень $\text{Re } Z$ на дуже низьких частотах може пояснюватись неідеальністю умов проведення експерименту.

На рис. 4 показані експериментальні й теоретичні залежності механічного імпедансу для трьох діаметрів робочої частини вібратора ($G' \neq 0$, $G'' \neq 0$). Для більших a експериментальні криві ле-

жать вище. З графіків видно, що для різних значень a зберігаються всі основні риси поведінки Z , відзначені при аналізі рис. 3. При цьому помітними є розбіжності між теоретичними й експериментальними низькочастотними значеннями $\text{Im } Z$. Можна припустити, що основною причиною цього є те, що при зниженні частоти більш значну роль починають відігравати сили зчеплення поверхні тіла з вібратором, а механічний контакт уже не можна вважати ідеально гладким.

ВИСНОВКИ

За результатами проведеного дослідження можна зробити ряд важливих висновків.

1. Запропоновано просту модель контактної взаємодії поверхні тіла людини з вібратором. При цьому вважалось, що на низьких частотах найбільш суттєву роль відіграє стовп біотканини, розташований під вібратором.
2. В припущенні про те, що при малих деформаціях поверхневі м'які біотканини на частотах звукового діапазону поведуть себе як лінійне пружне середовище, математичну модель зведено до стандартної задачі про віброзбудження торців пружного циліндра.
3. Аналіз наявних експериментальних даних дозволив установити, що фазова швидкість поздовжньої хвилі близька до швидкості звуку у воді і майже на три порядки перевищує швидкість поперечної хвилі. Крім того, вважалось, що для поперечної хвилі характерним є значне затухання. Відзначено, що урахування існування поперечної хвилі є принциповим для правильного опису характеру частотної залежності механічного імпедансу поверхні тіла при контактній взаємодії з жорстким штампом (вібратором).
4. Порівняння одержаних кількісних даних з результатами інших дослідників показало, що частотна залежність імпедансу торця пружного циліндра на низьких частотах добре узгоджується з експериментальними кривими, одержаними для шару гелеподібної речовини з відповідними механічними й геометричними параметрами.
5. При порівнянні з результатами натурних експериментів на передпліччі людини встановлено, що теоретична модель в цілому вірно відображає основні риси контактної взаємодії поверхні тіла з вібратором. Після вдосконалення фізичної моделі через розгляд об'єкта, частина поверхні якого залишається поза робочим торцем пелота вібратора, слід очікувати подальшого зближення теоретичних даних з експериментальними.
6. Проведене моделювання не дозволило зробити остаточного висновку про можливу величину й частотну поведінку коефіцієнта затухання поперечної хвилі у м'яких біотканинах. Аналіз характеру затухання в біоткани-

нах має бути продовжено на вдосконаленій моделі.

1. *Oestreicher H. L.* Field and impedance of an oscillating sphere in a viscoelastic medium with an application to biophysics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1951.– **23**, N 6.– P. 707–714.
2. *Franke E.* The mechanical impedance of the surface of the human body // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1949.– **21**, N 1.– P. 55.
3. *Von Gierke H. E.* Sound absorption at the surface of the body of man and animals // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 1949.– **21**, N 1.– P. 55.
4. *Verburg J., van Vollenhoven E.* Phonocardiography: physical and technical aspects and clinical uses // *Non invasive physiological measurements.*– London: Academic press, 1979.– P. 213–259.
5. *Олійник В. Н.* Раціональне проектування п'єзоакселерометрів для вимірювань на піддатливих поверхнях // *Акуст. вісн.*– 1998.– **1**, N 3.– С. 54–65.
6. *Zhang X., Royston T. J., Mansy H. A., Sandler R. H.* Radiation impedance of a finite circular piston on a viscoelastic half-space with application to medical acoustics // *J. Acoust. Soc. Amer.*– 2001.– **109**, N 2.– P. 795–802.
7. *Vermarien H., van Vollenhoven E.* The recording of heart vibrations: a problem of vibration measurement on soft tissue // *Med. & Biol. Engng & Comput.*– 1984.– **22**.– P. 168–178.
8. *Тиманин Е. М.* Модель формирования импедансных свойств мягких биологических тканей // *Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.*– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 75–91.
9. *Вовк И. В., Дахнов С. Л., Крижановский В. В., Олійник В. Н.* Изменение акустических характеристик шумов дыхания пневмонийных больных в процессе выздоровления // *Акуст. вісн.*– 1999.– **2**, N 4.– С. 3–12.
10. *Еремін Е. В., Тиманин Е. М.* Интерпретация механического импеданса слоя, измеренного с помощью твердого круглого штампа // *Акуст. ж.*– 2000.– **46**, N 4.– С. 490–495.
11. *Клочков Б. Н.* Ближнее поле силового низкочастотного источника на слоистой биоткани // *Акуст. ж.*– 2002.– **48**, N 1.– С. 70–76.
12. *Олійник В. Н.* Акустические свойства слоя на жестком основании при локальном виброзбудении // *Акуст. вісн.*– 2002.– **5**, N 1.– С. 42–49.
13. *Greenleaf J. F., Fatemi M., Insana M.* Selected methods for imaging elastic properties of biological tissues // *Ann. Rev. Biomed. Engng.*– 2003.– **5**.– P. 57–78.
14. *Самойлов В. О., Понамаренко Г. Н., Енин Л. Д.* Низкочастотная биоакустика.– С.-Пб.: Реверс, 1994.– 215 с.

15. Пашовкин Т. Н., Сарвазян А. П. Механические характеристики мягких биологических тканей // Методы вибрационной диагностики реологических характеристик мягких материалов и биологических тканей.– Горький: ИПФ АН СССР, 1989.– С. 105–115.
16. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 284 с.
17. Вовк И. В., Гринченко В. Т., Олейник В. Н. Проблемы моделирования акустических свойств грудной клетки и измерения шумов дыхания // Акуст. ж.– 1995.– 41, N 5.– С. 758–768.
18. Березовский В. А., Колотилов Н. Н. Биофизические характеристики тканей человека.– К.: Наук. думка, 1990.– 224 с.
19. Bossy E., Talmant M., Laugier P. Effect of bone cortical thickness on velocity measurements using ultrasonic axial transmission: A 2D simulation study // J. Acoust. Soc. Amer.– 2002.– 112, N 1.– P. 297–307.
20. Исакович М. А. Общая акустика.– М.: Наука, 1973.– 495 с.
21. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.– М.: Физматгиз, 1971.– 1108 с.