

## Модели и алгоритмы концентрации масс

© Ю. В. Гласко, 2013

Научно-исследовательский Вычислительный центр  
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия  
Поступила 16 апреля 2013 г.

*Представлено членом редколлегии В. И. Старостенко*

Наведено моделі викиду і концентрації мас та їх скінченнорізницьові схеми. Розглянуто два алгоритми концентрації густини речовини. Алгоритми реалізують методом палеток і методом статистичної регуляризації, що включає мінімізацію регуляризувального функціонала в умовах компакт-дисків, що стискаються, і метод Монте-Карло для формування значень шуканої густини речовини.

Models of sweeping-out and concentration of masses and their finite-difference schemes have been presented. Two algorithms of densities concentration have been considered. Algorithms are realized by the palettes method and the method of statistical regularization, which includes minimization of regularizing functional under conditions of compressible compacts and Monte Carlo method for formation of values of required densities.

**Введение.** В работах по прямым поискам нефти и газа уделяется пристальное внимание физико-геологическому обоснованию, где следует отметить такие достижения, как обнаружение вторичного магнетита и других минералов, изменение состава и окраски приповерхностных пород, а также состава воздушного слоя за счет миграции углеводородов. Эти открытия позволили широко (в основном за рубежом) использовать спутниковые, аэромагниторазведочные, аэрогеохимические методы, которые образуют с наземной (а теперь уже и аэро-) гравиразведкой единый комплекс. В сейсморазведке наметилось совместное применение продольных и поперечных волн, трехмерной сейсморазведки, используются новые разработки в электроразведке.

Таким образом, в проведении геофизических работ вырисовываются два основных этапа: предварительный (с применением дистанционных и геохимических методов), выявляющий участки с возможными залежами нефти и газа, и окончательный (с применением сейсморазведки, включая трехмерную), выявляющий ловушки и залежи.

Первый этап связан с решением задачи интерпретации геофизических данных [Интерпретация..., 1992], основанной на той или иной физико-геологической модели месторождений нефти и газа. В состав методов интерпретации геофизического поля входит методика выметания и концентрации масс, определяющая

плотностные и геометрические характеристики залежи. Выметание, согласно А. Пуанкаре, является конструктивным использованием эквивалентных перераспределений и предполагает участие человека-интерпретатора. Задача концентрации, обратная выметанию, — инструмент, заменяющий человека-интерпретатора на этапе выметания масс. Этой методике посвящены интереснейшие работы. Первые успешные шаги в области решения обратных задач интерпретации на основе эквивалентных (или даже  $\varepsilon$ -эквивалентных) перераспределений источников поля были сделаны в работах В. И. Аронова [Аронов, 1967], А. В. Цирульского [Цирульский, 1975] и других выдающихся ученых. Подчеркнем модели выметания и концентрации В. Н. Страхова [Страхов, 1977а, б] на основе задачи Стефана, разработку тематики В. Г. Филатовым [Филатов, 1988] и Д. Зидаровым [Зидаров, 1984], работы И. Э. Степановой [Степанова, 1998, 2003].

**Априорная информация о плотности и типы коллекторов.** Обратная задача концентрации на основе выметания Д. Зидарова требует априорной информации.

В целом плотностная характеристика изучаемой породы зависит от трех параметров: температуры, давления и влажности. Под воздействием высоких давлений и температур внутри Земли породы уплотняются. Этот процесс необратим, и поднятые на поверхность образцы керны мало изменяют свой объем и объем по-

рового пространства. Поправки, вводимые в измеренные значения плотности за различие термодинамических условий в естественном залегаении и в лаборатории, не превышают  $0,002-0,004 \text{ г/см}^3$ .

Отличаясь большим разнообразием, коллекторы подразделяются на две большие группы: песчано-алевритную (терригенную) и карбонатную (трещинную). В России наиболее распространены песчано-алевритные коллекторы, к которым приурочены основные месторождения нефти и газа. Средние значения их пористости составляют  $15-20\%$ . Карбонатные коллекторы имеют меньшую пористость — в среднем  $10-15\%$ . Количество остаточной воды в порах колеблется от  $5$  до  $65\%$ . Значения коэффициентов нефтегазонасыщенности достигают  $0,5-0,7$  и более.

Физические свойства нефти и газа заметно отличаются от соответствующих свойств законтурной воды, вследствие чего и возникают различия в плотностных и других свойствах области залежи и законтурной части коллектора. Нефть и газ приводят к уменьшению плотности в области коллектора.

Плотность нефти при атмосферном давлении и температуре  $20^\circ\text{C}$  колеблется в пределах  $0,76-0,96 \text{ г/см}^3$ . Обобщая экспериментальные данные, можно отметить, что плотность нефти в зависимости от ее состава колеблется от  $0,6$  до  $1 \text{ г/см}^3$  [Филатов и др., 2011а]. Важно подчеркнуть, что жидкости с ростом давления практически не изменяют своей плотности. Однако плотность нефти несколько уменьшается с глубиной под воздействием повышения температуры. В пластовых условиях значение плотности может составлять  $0,5 \text{ г/см}^3$  и даже меньше в зависимости от количества растворенного газа и температуры.

Плотность газа в атмосферных условиях обычно равна  $0,00128 \text{ г/см}^3$ . В общем случае она изменяется от  $0,0008$  до  $0,01 \text{ г/см}^3$  [Филатов и др., 2011а], но так как под давлением газы сжимаются, необходимо вводить поправку за давление, под которым они находятся. Поэтому в пластовых условиях плотность газа может достигать  $0,4-0,5 \text{ г/см}^3$ , т. е. приближаться к плотности нефти.

Таким образом, мы имеем априорную информацию о сегменте значений, которые может принимать характеристика  $\delta(\omega)$  — плотность залежи,  $\omega \in \Omega$ ; для нефти  $[0,4; 1 \text{ г/см}^3]$ , для газа  $[0,0008; 0,5 \text{ г/см}^3]$ . Эти интервалы могут быть еще сужены, если для конкретного случая помимо характеристик коллектора существует

априорная информация о глубине залегания углеводородов.

**2D модель выметания, ее конечно-разностная аппроксимация и априорная информация о плотности.** Математическая двумерная модель выметания описывается смешанной краевой задачей для уравнения диффузии [Мегеря и др., 2012]:

$$\Delta u(x, z, t) = u_t(x, z, t), \quad (1)$$

$$u(x, z, 0) = \begin{cases} \delta(x, z, 0), & (x, z) \in \Omega \\ 0, & (x, z) \in S/\Omega \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, t)|_{\Gamma} &= \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial n}|_{\Gamma}, \\ \int_0^T \frac{\partial u}{\partial n}(x, z, t)|_{\Gamma} dt &= u(x, z, T)|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $S/\Omega$  обозначает область  $S$  без области.

В физическом отношении залежь может рассматриваться как изолированное аномальное тело  $\Omega$  по отношению к водоносной законтурной части коллектора, в котором она находится. Для прямой задачи выметания следует определить  $u(x, z, t)$  — распределение плотности в момент времени  $t$ .

Начальное условие (2) определяет тот факт, что в момент времени  $t = 0$  массы с плотностью  $\delta(\sigma, 0)$ ,  $\sigma = (x, y)$  распределены лишь в залежи  $\Omega$ .

Нелинейные условия (3) обозначают, что масса, сосредоточенная в заданной области  $S$ , содержащей  $\Omega$ , с течением времени диффундирует через границу  $\Gamma = \partial S$  области и сосредотачивается на границе  $\Gamma$  в конечный момент процесса  $T$  в форме простого слоя.

Рассмотрим конечно-разностный аналог уравнений (1)–(3).

Введем в области определения  $u(x, z, t)$  прямоугольную сетку  $S \times [0, T]$  следующим образом:  $t_k = k\tau$ ,  $\tau = T/m$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ;  $x_{s,p}$  — точки области  $S$ , где  $s = 0, 1, \dots, M+1$ ;  $p = 0, 1, \dots, N+1$ ;  $h_1$  и  $h_2$  — шаги по  $x$  и  $z$  двумерной сетки. Для простоты можно рассматривать равномерную сетку:  $h_1 = h_2 = h$  ( $M = N = 2$  при  $h = 1/3$  и гранях длины 1).

Заменим каждую из вторых производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  разностными выражениями [Самарский, 1983]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\sim \frac{u_{s+1,p} - 2u_{s,p} + u_{s-1,p}}{h_1^2} \equiv \Lambda_1 u, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &\sim \frac{u_{s,p+1} - 2u_{s,p} + u_{s,p-1}}{h_2^2} \equiv \Lambda_2 u. \end{aligned}$$

Разностная схема порядка точности  $O(\tau+h^2)$

на этой сетке имеет вид [Самарский, Гулин, 1989]

$$\frac{u_{sp} - u_{sp}^k}{\tau} = \Lambda_{sp} u,$$

где

$$\Lambda_{sp} u \equiv \Lambda_1 u + \Lambda_2 u, \quad s = 1, \dots, M; \quad p = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Краевые условия представляются в виде

$$\frac{u_{sp} - u_{sp}^k}{\tau} \Big|_{\Gamma^h} = \Lambda_3 u, \quad \Lambda_3 u \sim \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma}, \quad (5)$$

$$\Lambda_4 u = u(x_s, z_p, T) \Big|_{\Gamma^h}, \quad \Lambda_4 u \equiv \sum_{k=0}^m \frac{\partial u(x, z, t_k)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \tau. \quad (6)$$

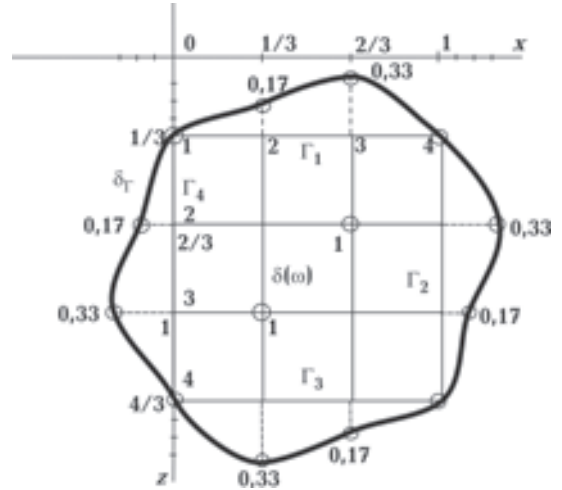
Не ограничивая общности, в качестве  $S$  рассмотрим квадрат  $[x_1, x_2] \times [z_1, z_2]$ . При этом  $\Gamma$  есть объединение граней  $\Gamma_4, \Gamma_2, \Gamma_1, \Gamma_3$  (ось  $OZ$  направлена в нижнее полупространство). В соответствии с рисунком,  $\Gamma_4$  — сторона  $S$ , соответствующая  $x = x_1, z \in (z_1, z_2)$ ,  $\Gamma_2$  —  $x = x_2, z \in (z_1, z_2)$ ,  $\Gamma_1$  —  $x \in [x_1, x_2], z = z_1$ ,  $\Gamma_3$  —  $x \in [x_1, x_2], z = z_2$ . Тогда

$$\frac{\partial u(x, z, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \begin{cases} -\frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x}, & (x, z) \in \Gamma_4, \\ \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial x}, & (x, z) \in \Gamma_2, \\ -\frac{\partial u(\sigma, t)}{\partial z}, & \sigma = x + iz \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial z}, & (x, z) \in \Gamma_3, \end{cases}$$

$$\Lambda_3 u = \begin{cases} \frac{u_{s+1,p} - u_{s,p}}{h_1}, & (x, z) \in \Gamma_4, \\ \frac{u_{s,p} - u_{s-1,p}}{h_1}, & (x, z) \in \Gamma_2, \\ -\frac{u_{s,p+1} - u_{s,p}}{h_2}, & (x, z) \in \Gamma_1, \\ \frac{u_{s,p} - u_{s,p-1}}{h_2}, & (x, z) \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (7)$$

Данная краевая задача для уравнения диффузии с граничными и начальными условиями (1)–(3) является устойчивой при выполнении условия  $\tau/h^2 \leq 1/4$ , т. е. условно-корректной по В. Н. Страхову. При  $\tau = h^2/4$  имеем схему выметания, предполагающую разметание каждой массы, при  $\tau/h^2 > 1/4$  часть массы в точке остается.

**3D модель выметания и ее конечно-разностная схема.** Рассмотрим математическую модель 3D выметания, описываемую смешан-



Распределение  $\delta_{\Gamma}$  на  $\Gamma \equiv \partial V$ . Безразмерные величины.

ной краевой задачей для уравнения диффузии ( $\sigma = (x, y, z)$ , где  $(x, y, z)$  — точки 3D области  $V$ ):

$$\Delta u(x, y, z, t) = u_t(x, y, z, t), \quad (8)$$

$$u(x, y, z, 0) = \begin{cases} \delta(x, y, z, 0) \forall (x, y, z) \in \Omega, \\ 0 \forall (x, y, z) \in V/\Omega, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma},$$

$$\int_0^T \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z, t) \Big|_{\Gamma} dt = u(x, y, z, T) \Big|_{\Gamma}.$$

Введем в области определения  $u(x, y, z, t)$   $V \times [0, T]$  прямоугольную сетку следующим образом:  $t_k = k\tau, \tau = T/m, k = 0, 1, \dots, m, x_{spl}$  — точки области  $V$ , где  $s = 0, 1, \dots, M+1; p = 0, 1, \dots, N+1; l = 0, 1, \dots, P+1$  ( $M = N = P = 2$  при  $h = 1/3$  и гранях длины 1);  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  — шаги по  $x, y$  и  $z$  трехмерной сетки. Для простоты можно рассматривать равномерную сетку с шагом  $h$ .

Сеточные аппроксимации уравнений аналогичны (4)–(7) с той лишь разницей, что они выписываются для 3D случая.

Заменим каждую из вторых производных  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  разностными выражениями [Самарский, Гулин, 1989]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u_{s+1,p,l} - 2u_{s,p,l} + u_{s-1,p,l}}{h^2} \equiv \Lambda_1 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{u_{s,p+1,l} - 2u_{s,p,l} + u_{s,p-1,l}}{h^2} \equiv \Lambda_2 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \sim \frac{u_{s,p,l+1} - 2u_{s,p,l} + u_{s,p,l-1}}{h^2} \equiv \Lambda_3 u.$$

Разностная схема порядка точности  $O(\tau+h^2)$  на этой сетке имеет вид

$$\frac{u_{spl} - u_{spl}^k}{\tau} = \Lambda_{spl} u,$$

где

$$\Lambda_{spl} u \equiv \Lambda_1 u + \Lambda_2 u + \Lambda_3 u,$$

$$s = 1, \dots, M; \quad p = 1, \dots, N; \quad l = 1, \dots, P.$$

Краевые условия представляются в виде

$$\frac{u_{spl} - u_{spl}^k}{\tau} \Big|_{\Gamma^h} = \Lambda_4 u, \quad \Lambda_4 u \sim \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma},$$

$$\Lambda_5 u = u(x_s, y_p, z_l, T) \Big|_{\Gamma^h}, \quad \Lambda_5 u \equiv \sum_{k=0}^m \frac{\partial u(x, z, t_k)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} \tau.$$

Не ограничивая общности, в качестве  $V$  рассмотрим куб. Соответственно  $\Gamma = \partial V = = \Gamma_1(x, z) \cup \Gamma_N(x, z) \cup \Gamma_1(x, z) \cup \Gamma_M(x, z) \cup \Gamma_1(x, z) \cup \Gamma_P(x, z)$  (ось  $OZ$  направлена в нижнее полупространство). Рассмотрим сеточный аналог куба и соответственно сеточную границу:

$$\Lambda_4 u = \begin{cases} \frac{u_{s,p+1,l} - u_{s,p,l}}{\Delta y}, & \sigma^h \in \Gamma_1^h(x, z), \\ \frac{u_{s,p,l} - u_{s,p-1,l}}{\Delta y}, & \sigma^h \in \Gamma_N^h(x, z), \\ \frac{u_{s+1,p,l} - u_{s,p,l}}{\Delta x}, & \sigma^h \in \Gamma_1^h(y, z), \\ \frac{u_{s,p,l} - u_{s-1,p,l}}{\Delta x}, & \sigma^h \in \Gamma_M^h(y, z), \\ \frac{u_{s,p,l+1} - u_{s,p,l}}{\Delta z}, & \sigma^h \in \Gamma_1^h(x, y), \\ \frac{u_{s,p,l} - u_{s,p,l-1}}{\Delta z}, & \sigma^h \in \Gamma_P^h(x, y). \end{cases}$$

Конечно-разностная схема имеет порядок точности  $O(\tau+h^2)$  и решается методом прогонки для трехмерной матрицы. Задача концентрации обратна выметанию и является некорректной (как отметил В. Н. Страхов [Страхов, 1977б]), поэтому здесь применяем регуляризацию [Тихонов, Арсенин, 1979].

**Метод конечных элементов.** Пожалуй, самым широко используемым сеточным методом является метод конечных элементов (МКЭ). Он основан на разбиении исходной области на множество ячеек (конечных элементов) [Деклу, 1976]. В каждом элементе вводится ап-

проксимирующая функция, выраженная значениями искомой функции в узлах элемента с помощью функций формы. Обычно в качестве таких функций выступают полиномы. На основе какого-либо общего закона (обычно в виде вариационного принципа) формируется разрешающая СЛАУ (система линейных алгебраических уравнений) относительно значений функции в узлах конечно-элементной сетки. Разбиение области на конечные элементы позволяет эффективно применять метод для задач с высокой нелинейностью и неоднородностью свойств, поскольку можно рассматривать материал как однородный в пределах каждого элемента. К недостаткам метода можно отнести высокую размерность разрешающих СЛАУ (по сравнению, например, с методом граничных элементов). Обусловленность разрешающих систем для МКЭ ухудшается с увеличением числа конечных элементов (уменьшением размера элемента), что может привести к большой погрешности в решении при малых погрешностях исходных данных.

Отметим, что именно МКЭ наиболее часто используется в задачах геофизики и является одним из элементов «геофизического диалекта вычислительной математики» (терминология В. Н. Страхова).

Именно такой подход к решению обратной задачи интерпретации посредством  $S$ -аппроксимации геопотенциальных полей в рамках подхода «решения обратных задач без решения прямых» и реализован в работах академика В. Н. Страхова и И. Э. Степановой [Степанова, 2003]. Обратную задачу на этапе выметания предлагается решать подбором в заданном множестве морфологии залежи.

**Выметание методом конечных элементов. Результаты.** Автором настоящей статьи проведен большой массив математических экспериментов выметания посредством четырехточечной (для 2D случая) и шеститочечной (для 3D варианта) схем. Время выметания менее 1 с (на компьютере Pentium 3) для рассмотренных морфологий залежи. Точность выметания практически абсолютная — выбрано  $\varepsilon \sim 10^{-100}$ .

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

1. Сеточный оператор выметания (sweeping) обладает свойством линейности:

$$f_{sweep}^h \left( \sum_{s=1}^M \sum_{p=1}^N \delta_{sp} \right) = \sum_{s=1}^M \sum_{p=1}^N f_{sweep}^h (\delta_{sp}),$$

$$f_{sweep}^h (a\delta) = a f_{sweep}^h (\delta), \quad a = \text{const.}$$

Это свойство объясняется линейностью опи-

сывающего процесс параболического уравнения (1).

Для трехмерного случая — краевая задача для уравнения (8) — имеем

$$f_{sweep}^h \left( \sum_{s=1}^M \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^P \delta_{spl} \right) = \sum_{s=1}^M \sum_{p=1}^N \sum_{l=1}^P f_{sweep}^h (\delta_{spl}),$$

$$f_{sweep}^h (a\delta) = a f_{sweep}^h (\delta), \quad a = \text{const.}$$

2. Сетка, аппроксимирующая  $V$  либо  $S$  четным числом узлов, более информативна для определения геометрии, чем нечетная сетка.

Характеристика сетки важна для односвязной области. Так, если мы имеем нечетное число узлов, аппроксимирующих куб  $V$ , содержащий  $\Omega$  (для 2D случая — квадрат  $S$ ), то максимумы выметенной на  $\partial V$  ( $\partial S$ ) плотности определяют лишь центр тяжести односвязного аномалиеобразующего тела — одну точку, в то время как сетка, которая аппроксимирует  $V$  ( $S$ ) четным числом узлов, более информативна. Она позволяет определить сразу четыре точки объекта для 2D случая и шесть для 3D случая.

В случае многосвязной области можно ввести несколько кубов (в 2D — квадратов), охватывающих лишь односвязную область, и использовать сетку с четным числом узлов.

3. Полученные 2D поверхности выметенной плотности можно использовать в рамках метода палеток для трактовки геометрии залежи.

4. Обратная к выметанию задача концентрации выметенных на  $\Gamma$  масс может быть решена несколькими способами.

А. Локализация источников гравитационной аномалии на основе анализа поверхности значений выметенной на  $\Gamma$  массы.

Будем аппроксимировать форму ловушки телами простой геометрической формы. Множество моделей источников гравитационной аномалии назовем множеством глубинной морфологии источника и обозначим  $M_{обкт}$ . Используем такие объекты из  $M_{обкт}$ , как отрезок, риманова поверхность, прямоугольник, многоугольник, круг, квадрат, шар, многоугольная призма, цилиндр, куб.

При указанном подходе важна классификация возможных вариантов поверхности с целью их трактовки. Эта структура рассматривается в  $M_{обкт}$  для односвязных либо многосвязных областей.

На основе накопленного вычислительного материала относительно классов кривых (2D случай) строятся карты. Карты кривых выметенных масс применяются на основе принципа палеток, в частности на полулогарифмических бланках.

Б. Локализация источников поточечно — с использованием свойства линейности функции выметания. Соответственно концентрация проводится в итерационном цикле, пока выметенная масса не станет равной нулю. Данный подход представляется более универсальным.

Следует также отметить, что задача определения геометрии залежи может быть решена в первом приближении для априори заданной на основе разведки легкими методами плотности.

Для более сложной постановки плотность ищется на основе метода Монте-Карло в сегменте  $[0, 4; 1]$  либо более узком в зависимости от априорной информации о конкретной залежи нефти. Следует учесть и физико-геологические свойства нефти.

**Концентрация масс.** Модель концентрации для 2D имеет вид

$$\Delta u(x, z, t) = u_t(x, z, t),$$

$$u(x, z, T) = \begin{cases} 0 \forall (x, z) \in S/\partial S, \\ \delta(x, z, T) \forall (x, z) \in \partial S, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, z, t) \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial u(x, z, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma},$$

$$-\int_0^T \left. \frac{\partial u}{\partial n}(x, z, t) \right|_{\Gamma} dt = u(x, z, 0) |_{\Gamma}.$$

Модель концентрации для 3D случая:

$$\Delta u(x, y, z, t) = u_t(x, y, z, t),$$

$$u(x, y, z, T) = \begin{cases} 0 \forall \sigma \in V/\partial V, \\ \delta(\sigma, T), \quad \sigma \in \partial V, \end{cases}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, t) \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial n} \right|_{\Gamma},$$

$$-\int_0^T \left. \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z, t) \right|_{\Gamma} dt = u(x, y, z, 0) |_{\Gamma}.$$

Впрочем, концентрация может моделироваться и посредством многократного решения задачи выметания, т. е. как задача, связанная с обращением причинно-следственной связи [Тихонов и др., 1990]. При этом модель выметания дополняется целевым условием:

$$u(x, z, T) = \begin{cases} 0, \quad \forall (x, z) \in S/\partial S, \\ \delta(x, z, T), \quad \forall (x, z) \in \partial S, \end{cases}$$

$$\int_{\Gamma} \delta(\sigma^*, T) d\sigma^* = \iint_{\Omega} \delta(\omega, 0) d\omega \quad \text{для 2D случая либо}$$

$$u(x, y, z, T) = \begin{cases} 0, \quad \forall \sigma \in V/\partial V, \\ \delta(\sigma, T), \quad \sigma \in \partial V, \end{cases}$$



$$\iint_{\Gamma} \delta(\sigma^*, T) d\sigma^* = \iiint_{\Omega} \delta(\omega, 0) d\omega \text{ для 3D случая.}$$

Возможны следующие постановки задачи концентрации [Филатов и др., 2011б]:

- при заданной плотности  $\delta_{\Omega}$  определить область  $\Omega$ ;
- при заданной геометрии  $\Omega$  из  $M_{\text{обкт}}$  определить  $\delta_{\Omega}$ ;
- частично заданы параметры  $\Omega$  и  $\delta_{\Omega}$ , следует определить остальные характеристики.

Предложенный в данной работе метод концентрации плотностей гравитирующих масс, имея в основе МКЭ, предполагает введение аппроксимирующей функции на основе метода Монте-Карло.

Метод концентрации опробован на ряде моделей, состоящих из 2—10 источников гравитационных полей на 2—3 глубинах, и на практических материалах. Определение геометрии залежи при известной вынесенной на границу  $\Gamma$  массе проводится при постоянной плотности, равной 1 г/см<sup>3</sup>. Усложняя постановку, плотности источников моделируем методом Монте-Карло на сегменте [0,4; 1]. В некоторых математических экспериментах опробованы [0,5; 1] и [0,6; 1].

Следует учесть физико-геологические характеристики нефти. Поскольку на данном месторождении имеем дело с нефтью одного состава, то можно считать ее плотность постоянной (может быть плавно изменяющейся с глубиной). По крайней мере, ни о каком скачкообразном изменении плотности речи быть не может. Более того, поскольку плотность породы определяется не данной глубиной, а максимальной глубиной, достигнутой породой в процессе геологического развития, то можно не учитывать и качество горизонтов залежи, а считать плотность нефти постоянной для всей односвязной области залежи на данной глубине. Впрочем, данная гипотеза имеет ограничения относительно протяженных объектов (месторождений-гигантов). Сейчас месторождения-гиганты выработаны и наиболее перспективными являются месторождения небольшого горизонтального простирания.

Таким образом, определив плотность нефти методом Монте-Карло на [0,4; 1] в одной точке односвязной области, аппроксимирующей залежь, ее можно задать как постоянную плотность и во всех остальных точках этой области. Другими словами, для определения геометрии залежи метод Монте-Карло уже не требуется.

**Модельный пример концентрации с использованием метода Монте-Карло и тихоновского функционала.** Рассмотрим задачу концентрации для следующего распределения граничной плотности  $\delta_{\Gamma}$ , представленного на рисунке.

Выметание осуществляем четырехточечной схемой.

Используем алгоритм поиска распределений плотностей  $\delta_{\Omega}$  в области  $\Omega$  на основе статистической регуляризации посредством метода Монте-Карло и невязку на компакте:

$$\rho^2(A\delta(\omega), \delta_{\Gamma}(s^*)) = \left\| A\delta(\omega) - \delta_{\Gamma}(s^*) \right\|_{L_2}^2,$$

где  $\delta_{\Gamma}$  — распределение плотности на границе  $\Gamma$ .

Проведем моделирование внутренних плотностей без информации о допустимом сегменте плотности и минимальной информации о геометрии залежи по  $\delta_{\Gamma}$ . Число опытов методом Монте-Карло  $N = 300$ , точность  $\varepsilon_{\text{МК}} = 10^{-4}$ . Получим (по четырем экспериментам) средние значения погрешности локализации в основных точках:  $\delta(1/3; 1) \sim 3,1\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 5,05\%$ , средняя суммарная погрешность, определяющая геометрию  $\Omega$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1\%$ . Время расчета  $t_{\text{сч}} \sim 6$  мин.

Если конкретизировать сегмент допустимых плотностей (для нефти плотность не более 1 г/см<sup>3</sup>), то  $\delta(1/3; 1) \sim 3,6\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 3,5\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1,4\%$ . При этом время расчета  $t_{\text{сч}}$  уменьшится в 6—7 раз — менее 1 мин. Увеличение числа опытов метода Монте-Карло увеличивает  $t_{\text{сч}}$  без увеличения точности по основным точкам.

Использование стабилизатора  $\Omega[\delta(\omega)] = \left\| \delta(\omega) - \delta_{\text{нг}}(\omega) \right\|_{L_2}^2$ , где  $\delta_{\text{нг}}(\omega)$  — опорное значение искомой плотности, и соответственно тихоновского функционала [Тихонов, Арсенин, 1979] вместо невязки  $M^{\alpha}[\delta_{\Omega}, \delta_{\Gamma}] = \rho^2(A\delta(\omega), \delta_{\Gamma}) + \alpha\Omega[\delta(\omega)]$  хотя и улучшает результат (при  $\alpha = 3$ ,  $\varepsilon_{\text{МК}} = 10^{-3}$ ):  $\delta(1/3; 1) \sim 2,2\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 2,7\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 0,67\%$ , но значительно (в 20 раз — 21 мин) увеличивает  $t_{\text{сч}}$ .

Введем погрешность в  $\delta_{\Omega}$  по основным точкам при решении задачи выметания (прямой задачи). Задача концентрации без априорной информации о геометрии и плотности имеет значительные ошибки. При погрешности в  $\delta_{\Omega, \text{sweep}}$  в прямой задаче  $\Delta = 5\%$  средние (по четырем расчетам и  $N = 300$ ) погрешности результата:  $\delta(1/3; 1) \sim 11\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,3\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 8,5\%$ ; при  $\Delta = 10\%$  —  $\delta(1/3; 1) \sim 2,7\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 3,9\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 12\%$ ; при  $\Delta = 15\%$  —  $\delta(1/3; 1) \sim 5,7\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 2,45\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 10\%$ ; при  $\Delta = 20\%$  —  $\delta(1/3; 1) \sim 2,1\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,8\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 14,25\%$ . Время рас-

чета менее 1 мин (~10 с). Если при точно заданном  $\delta_r$  конкретизируем сегмент плотностей и геометрию ( $\varepsilon_{МК} = 10^{-5}$ ), то  $\delta(1/3; 1) \sim 1,6\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,24\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1,2\%$ . Если при этом проводится стабилизация, то (средние по пяти расчетам,  $N = 300$ ,  $\varepsilon_{МК} = 10^{-3}$ ,  $\alpha = 100$ ) получим  $\delta(1/3; 1) \sim 0,59\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 0,69\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 0,68\%$ . Примерно такой же результат при  $N = 300$ ,  $\varepsilon_{МК} = 10^{-5}$ ,  $\alpha = 1$ . Время расчета 10 с—2 мин.

Если конкретизирован сегмент плотностей и проводится регуляризация с использованием тихоновского функционала, то для  $\Delta = 5\%$  ( $\alpha = 2$ ,  $\varepsilon_{МК} = 10^{-3}$ ) погрешность (средняя по пяти расчетам,  $N = 300$ ) в основных точках  $\delta(1/3; 1) \sim 2,05\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 2,4\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1\%$  (время расчета ~25 мин). Для  $\Delta = 10\%$ :  $\delta(1/3; 1) \sim 1,47\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,97\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 0,33\%$ .

Если задать помимо сегмента плотностей геометрию и провести регуляризацию, то ( $\varepsilon_{МК} = 10^{-2}$ ,  $\alpha = 100$ ) для  $\Delta = 5\%$ : средние значения погрешностей —  $\delta(1/3; 1) \sim 1,65\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,5\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1,6\%$ . Для  $\Delta = 10\%$ :  $\delta(1/3; 1) \sim 1,65\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,8\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1,5\%$ . Для  $\Delta = 15\%$ :  $\delta(1/3; 1) \sim 1,5\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,4\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1,4\%$ . Для  $\Delta = 20\%$ :  $\delta(1/3; 1) \sim 1,23\%$ ,  $\delta(2/3; 2/3) \sim 1,5\%$ ,  $\delta_{\Omega} \sim 1,25\%$ . Время расчета менее 10 с.

### Список литературы

- Аронов В. И. К вопросу о решении задачи Неймана в гравиметрии // Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли. — 1967. — № 2. — С. 54—59.
- Деклу Ж. Метод конечных элементов. — Москва: Мир, 1976. — 95 с.
- Зигаров Д. Обратна гравиметрична задача в геопрочуваного и геодезията. — София: Изд. Болгар. АН, 1984. — 278 с.
- Интерпретация гравитационных и магнитных полей: Сб. науч. тр. / Отв. ред. В. Н. Страхов, В. И. Старостенко. — Киев: Наук. думка, 1992. — 248 с.
- Мегеря В. М., Филатов В. Г., Старостенко В. И., Корчагин И. Н., Лобанов А. М., Гласко Ю. В., Волоцков М. Ю., Скачков С. А. Возможности и перспективы применения несейсмических методов для поисков скоплений углеводородов и геосолитонная концепция их образования // Геофиз. журн. — 2012. — 34, № 3. — С. 4—21.
- Самарский А. А. Теория разностных схем. — Москва: Наука, 1983. — 616 с.
- Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — Москва: Наука, 1989. — 429 с.
- Из расчетов следует, что параметр регуляризации и точность метода Монте-Карло взаимозависимы и их согласование определяет как точность всего алгоритма концентрации, так и  $t_{сч}$ . Оптимальными считаются 300 опытов метода Монте-Карло. Априорной информации о сегментах плотностей нефти вполне достаточно, чтобы в рамках регуляризации получить приемлемые результаты даже при большой (~20%) погрешности во входных данных. Априорная информация о геометрии снижает требования по точности к методу Монте-Карло и увеличивает эффективность регуляризации при погрешностях, значительно снижая время счета.
- Выводы.** Построены модели и конечно-разностные схемы выметания и концентрации. Предложены несколько алгоритмов концентрации. Первый из них для 2D случая предполагает метод палеток для определения геометрии и плотности залежи углеводородов. Второй алгоритм базируется на процессе статистической регуляризации. Этот алгоритм может применяться в рамках априорной информации о плотности, геометрии и поточечно. Использование регуляризации на основе тихоновского функционала дает устойчивые результаты при погрешностях во входных данных.
- Степанова И. Э. О восстановлении источника гравитационных масс в задачах типа рудных // Физика Земли. — 1998. — № 11. — С. 86—89.
- Степанова И. Э. S-аппроксимации в методе линейных интегральных представлений при решении задач геофизики: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Москва: ИФЗ РАН, 2003. — 316 с.
- Страхов В. Н. О выметании масс по Пуанкаре и его использовании при решении прямых и обратных задач гравиметрии // Докл. АН СССР. — 1977б. — 236, № 1. — С. 54—57.
- Страхов В. Н. О подходе к решению обратных задач гравиметрии, основанном на теории эквивалентных перераспределений масс // Докл. АН СССР. — 1977а. — 236, № 3. — С. 571—574.
- Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — Москва: Наука, 1979. — 284 с.
- Тихонов А. Н., Кальнер В. Д., Гласко В. Б. Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении. — Москва: Машиностроение, 1990. — 263 с.
- Филатов В. Г. Устойчивые способы обработки и интерпретации потенциальных полей на осно-

ве регуляризации и концентрации источников: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Киев: ИГФ АН УССР, 1988. — 49 с.

Филатов В. Г., Старостенко В. И., Мегеря В. М., Зинновкин С. В., Михайлов И. Н., Гласко Ю. В. Определение плотности горных пород по образцам и каротажу / Определение плотностей горных пород и геологических объектов в нефтегазодобыче: Уч. пособие. — Москва: Изд. РГГРУ, 2011а. — С. 12—55.

Филатов В. Г., Старостенко В. И., Мегеря В. М., Зинновкин С. В., Михайлов И. Н., Гласко Ю. В. Определение плотности по наземным и скважинным гравиметрическим измерениям / Определение плотностей горных пород и геологических объектов в нефтегазодобыче: Уч. пособие. — Москва: Изд. РГГРУ, 2011б. — С. 56—146.

Цирульский А. В. О редукции потенциальных геофизических полей на внешнюю плоскость // Изв. АН СССР. Физика Земли. — 1975. — № 7. — С. 43—47.